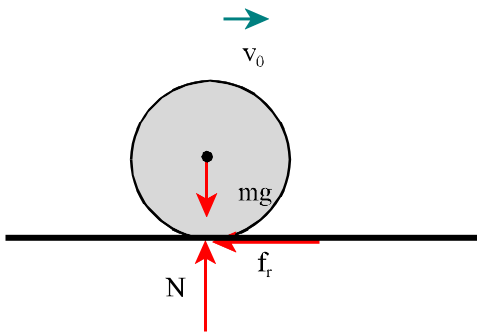
Mecánica 2º Bachillerato ***Problemas resueltos de mecánica del sólido rígido***

24. *Habrás observado en más de una ocasión que al golpear un balón sobre una superficie horizontal se empieza a mover deslizando, con el tiempo va deslizando y rodando para dejar de deslizar y continuar sólo rodando para acabar detenido.*
Demuestra que si una esfera de momento de inercia $I = 2/5 \cdot m \cdot R^2$ que empieza a deslizar sobre una superficie horizontal con una rapidez v_0 empezará sólo a rodar cuando su rapidez sea $5/7 \cdot v_0$
Determina la variación que experimenta la energía mecánica en el proceso.



Aunque en la práctica el movimiento no es uniformemente acelerado resolveremos el mismo aceptando que lo es.
Para empezar representamos el diagrama de sólido libre del balón siendo las únicas fuerzas que actúan sobre él las que ejercen el suelo y la gravitatoria terrestre.
La componente horizontal del suelo, la fuerza de rozamiento, es la única que va a variar la velocidad del centro de masas del balón y la única que crea momentos respecto al centro de masas y que por tanto le provocará una aceleración angular.
El momento de la fuerza de rozamiento y la aceleración angular tienen ambos sentido horario, luego les corresponde el mismo signo.
En el eje horizontal los vectores hacia la derecha son positivos.

Las ecuaciones son

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_{c.m.} = m \cdot \frac{(\vec{v} - \vec{v}_0)}{\Delta t} \qquad -f_r = m \cdot a_{c.m.} = m \cdot \frac{(v - v_0)}{t}$$

$$\sum \vec{M}_{ext} = I \cdot \vec{\alpha} \qquad f_r \cdot R = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 \cdot \alpha = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{(\omega - \omega_0)}{t}$$

Como cuando deje de deslizar $\omega = \dfrac{v}{R}$ *y* $\omega_0 = 0$

$$f_r \cdot R = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{v}{R} \cdot \frac{1}{t}$$

$$f_r = \frac{2}{5} \cdot m \cdot v \cdot \frac{1}{t}$$

$$-\frac{2}{5} \cdot m \cdot v \cdot \frac{1}{t} = m \frac{(v - v_0)}{t} \qquad -\frac{2}{5} \cdot v = v - v_0$$

$$v = \frac{5}{7} v_0$$

La variación que experimentó la energía mecánica en ese proceso fue:

$$\Delta E = E_c - E_{c_0} = \left(\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 + \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2\right) - \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_0^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\cdot\left(\frac{5}{7}\cdot v_0\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot m\cdot R^2\left(\frac{\frac{5}{7}\cdot v_0}{R}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_0^2$$

$$\Delta E = \frac{25}{2\cdot 49}\cdot m\cdot v_0^2 + \frac{25}{5\cdot 49}\cdot m\cdot v_0^2 - 0{,}5\cdot m\cdot v_0^2$$

$$\Delta E = 0{,}357\cdot m\cdot v_0^2 - 0{,}5\cdot m\cdot v_0^2$$

$$\Delta E = -0{,}143\cdot m\cdot v_0^2$$

Observa que la variación de energía mecánica ha sido negativa, lo que no podía ser de otra forma dado que el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento de deslizamiento lo es.
La energía final es

$$\frac{E}{E_0} = \frac{0{,}357}{0{,}5}\cdot\frac{m\cdot v_0^2}{m\cdot v_0^2}\cdot 100\% = 71{,}4\%$$