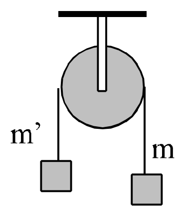
Mecánica 2º Bachillerato

Problemas resueltos de dinámica del sólido rígido

1. *Considera la polea representada de masa, radio y momento de inercia conocidos que puede girar libremente alrededor de un eje que pasa por su centro de masas. (Libremente equivale a decir que el eje no ejerce fuerzas ni momentos de rozamiento).Por medio de una cuerda de masa despreciable colgamos sendos cuerpos de masas conocidas.*

a- Plantea las ecuaciones que te permiten calcular la aceleración de cada partícula, la aceleración angular de la polea y las tensiones en la cuerda.

b- Escribe cómo quedan las ecuaciones anteriores si despreciamos el momento de inercia de la polea $I = 0$ y calcula la aceración de cada masa. (En realidad esto no sucede nunca pero si la masa de la polea es muy pequeña en relación a las masas de los cuerpos que cuelgan la aproximación es más que aceptable y como tal la utilizamos en el curso anterior)



c- Si $m = 3kg$, $m' = 2kg$, $m_p = 2kg$, $R = 0{,}2m$ $I_{disco} = ½ \cdot m_p \cdot R^2$ calcula la aceleración de cada masa, la aceleración angular de la polea, la tensión de la cuerda y la reacción en el punto de apoyo.

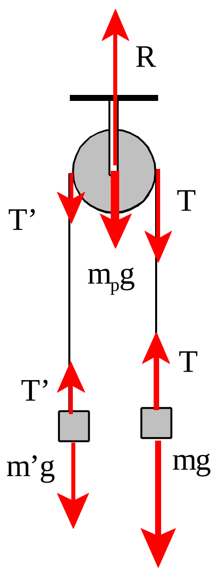
d- Calcula la aceleración del centro de masas del conjunto formado por las masas y la polea.

e- Calcula la velocidad de cada masa y la velocidad angular de la polea a los 3s de iniciado el movimiento y la energía cinética del conjunto.

f. Calcula la variación que ha experimentado la energía mecánica del sistema entre los instantes inicial y $t = 3s$. (Puedes suponer que las masas inicialmente están a la misma altura). Da una explicación del resultado obtenido

g. Si a la polea le aplicamos un momento de rozamiento mediante unas zapatas como los frenos de una rueda de bicicleta, explica dónde será más conveniente situar las zapatas y porqué al ejercer más fuerza sobre las mismas frenará antes.

h- Calcula el momento de rozamiento que es necesario aplicar para que la polea gire con velocidad angular constante y determina las tensiones en la cuerda.



Para resolver este tipo de problemas n primer lugar representaremos las fuerzas que actúan sobre cada uno de los elementos que conforman el sistema; en este caso la masas que cuelgan que se van a trasladar y la polea que rota.

A cada cuerpo le aplicaremos el 2º principio de la dinámica para un cuerpo que se traslada, las masas que cuelgan, y o para uno que rota, la polea.

Tendremos en cuenta la relación entre las aceleraciones de las distintas partículas que se trasladan, en este caso tienen el mismo módulo y la relación entre la aceleración angular del sólido que rota y la aceleración de las partículas que se trasladan.

Sobre las masas que se trasladan actúan la tierra y la cuerda que se mueven con aceleración vertical del mismo módulo.

Sobre la polea actúan ambas cuerdas, la tierra y la reacción en el apoyo. Su centro de masas no acelera pero lleva una aceleración angular provocada por las cuerdas y que guarda relación con la aceleración de las partículas, al no deslizar las cuerdas.

Aplicamos el segundo principio de la dinámica a la traslación de las partículas y a la rotación de la polea:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad \sum \vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$$

Las ecuaciones de la traslación a las dos masas , de la rotación de la polea y del hecho que el c.m. de la polea está en reposo son:

$$m \cdot g - T = m \cdot a$$

$$R \cdot T - R \cdot T' = I \cdot \alpha = I \cdot \frac{a}{R}$$

$$T' - m' \cdot g = m' \cdot a$$

$$T + T' + m_p \cdot g - R = 0$$

Despejando la aceleración resulta

$$a = \frac{m \cdot g - m' \cdot g}{\left(m + m' + \frac{I}{R^2} \right)}$$

b. Despreciando el momento de inercia de la polea resulta

$$m \cdot g - T = m \cdot a$$

$$R \cdot T - R \cdot T' = 0 \qquad T = T'$$

$$T' - m' \cdot g = m' \cdot a \qquad a = \frac{m \cdot g - m' \cdot g}{m + m'} \qquad T = m' \cdot g \left(1 + \frac{m - m'}{m + m'} \right)$$

c. Sustituyendo los valores numéricos en las ecuaciones del apartado -a- resulta

$$a = \frac{g}{6} m/s^2 \qquad \alpha = \frac{g}{1{,}2} rad/s^2 \qquad T = 25N \qquad T' = \frac{70}{3} N \qquad R = 68{,}3N$$

Cuando no se tiene en cuenta el peso de la polea la aceleración resulta ser algo mayor a = g/5.
Esta aproximación es tanto más válida cuanto menor es el momento de inercia de la polea. Poleas ligeras en relación a las masas.

d. Para el cálculo de la aceleración del c.m. del conjunto podemos aplicar el concepto de aceleración de centro de masas de un sistema dado que conocemos cómo se mueve cada elemento

$$\vec{a}_{c.m.} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{a}_i}{\sum m_i} = \frac{-3 \cdot \frac{g}{6} \cdot \vec{j} + 2 \cdot \frac{g}{6} \cdot \vec{j} + 0}{3 + 2 + 2} = -0{,}24 \cdot \vec{j} \; m/s^2$$

Se podría calcular también la aceleración del c.m. del conjunto aplicando el 2º principio al conjunto pues conocemos las fuerzas externas que actúan sobre él.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m_T \cdot \vec{a}_{c.m.}$$

$$m \cdot \vec{g} + \vec{R} + m' \cdot \vec{g} = (m + m' + m_p) \cdot \vec{a}_{c.m.}$$

llegaríamos al mismo resultado.

e. Como se mueven con aceleración constante la rapidez adquirida por las masas, el espacio recorrido por las mismas y la velocidad angular de la polea a los 3segundos es:

$$v = a \cdot t = \frac{g}{6} \cdot 3 = 5m/s \qquad x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{6} \cdot 3^2 = 7{,}5m$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{5}{0{,}2} = 25s^{-1}$$

f. Para determinar la energía mecánica del conjunto tomaremos como referencia de energías potenciales la posición en la que se encuentran inicialmente las masas puntuales, siendo d la altura a la que se encuentra el c.m. de la polea con respecto a las masas.

La energía mecánica cuando se han desplazado una distancia h será suma de la potencial gravitatoria y la cinética, teniendo en cuenta que la masa mayor ha descendido y la menor ha ascendido.
Por tanto

$$E_{inicial} = E_p + E_c = 0 + 0 + m_p \cdot g \cdot d + 0 = m_p \cdot g \cdot d$$

La energía final, suma de la potencial de todas las masas y la cinética de los tres elementos es

$$E_{final} = -m \cdot g \cdot h + m' \cdot g \cdot h + m_p \cdot g \cdot d + \frac{1}{2} \cdot (m + m') \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

$$E_{final} = (m' - m) g \cdot h + m_p \cdot g \cdot d + \frac{1}{2} \cdot (m + m' + \frac{I}{R^2}) \cdot v^2$$

$$Siendo \quad v^2 = 2 \cdot a \cdot h = 2 \cdot \frac{m \cdot g - m' \cdot g}{m + m' + \frac{I}{R^2}}$$

$$E_{final} = (m' - m) g \cdot h + m_p \cdot g \cdot d + \frac{1}{2} \cdot (m + m' + \frac{I}{R^2}) \cdot 2 \cdot \frac{(m - m') \cdot g}{m + m' + \frac{I}{R^2}}$$

$$E_{final} = m_p \cdot g \cdot d$$

La energía mecánica final coincide con la inicial, no hay variación de la energía mecánica.
La razón está en que las fuerzas gravitatorias son conservativas, la reacción del eje no realiza trabajo dado que no se desplaza al contar en la modelización que es un eje puntual y las tensiones, que son fuerzas internas y realizan trabajo, hacen el mismo con signo cambiado por lo que su trabajo es cero.

g. Las zapatas de los frenos convendrá alejarlas del eje de giro de la rueda para conseguir que el momento de las fuerzas de rozamiento sea mayor y provocar así una mayor aceleración angular de frenado.
Al ejercer más fuerza las zapatas sobre la llanta estamos aumentando la fuerza normal entre ambas superficies con lo que aumenta la fuerza de rozamiento y en consecuencia el momento de frenado.

h. Aplicaremos las ecuaciones del apartado a teniendo en cuenta el momento de rozamiento y si la velocidad es constante las aceleraciones de las partículas y la angular de la polea son cero.

Las ecuaciones son:

$$m \cdot g - T = 0$$
$$R \cdot T - R \cdot T' - M_{roz} = 0$$
$$T' - m' \cdot g = 0$$

Resolviendo el sistema

$$T = m \cdot g \qquad T' = m' \cdot g \qquad M_{roz} = (m \cdot g - m' \cdot g) R$$