Mecánica 2º Bachillerato ***Problemas resueltos de Cinemática***

28. *Un móvil se desplaza sobre el eje X siendo su aceleración $a = -K\cdot v^2$ S.I. Siendo K una constante*
a- Si su velocidad cuando t = 0 es v_o escribe la ecuación de la velocidad en función del tiempo.
b- Determina la posición del mismo en función de t si para t = 0 x = 0.
c- La aceleración de frenado que el aire le comunica a un ciclista puede modelizarse a la expresión anterior así si un ciclista que viaja a 36km/h por terreno horizontal deja de pedalear, el aire le comunica una aceleración que viene dada por la expresión $a = -0{,}003\cdot v^2$ S.I.
Escribe la ecuación de la velocidad y de la posición del ciclista en función del tiempo.
d- Calcula el tiempo que tarda en reducirse su velocidad a la mitad y el espacio total recorrido en ese tiempo.
e- Calcula el tiempo que tarda en reducir su velocidad a la cuarta parte y el espacio total recorrido en ese tiempo.

Utilizamos la definición de aceleración para un movimiento rectilíneo, separamos variables, integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales.

$$a = \frac{dv}{dt} = -K\cdot v^2 \quad Cuando \quad t = 0 \quad x = 0 \quad v = v_0$$

Que separando variables e integrando queda

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int -K\cdot t \qquad -\frac{1}{v} = -K\cdot t + cte \quad \Rightarrow cte = -\frac{1}{v_0}$$

Luego la velocidad en función del tiempo resulta

$$-\frac{1}{v} = -K\cdot t - \frac{1}{v_0} \qquad v = \frac{v_0}{(v_0\cdot K\cdot t + 1)}$$

Para el cálculo de la posición utilizaremos la definición de velocidad para el movimiento rectilíneo, separaremos variables y teniendo en cuenta la posición inicial que es x= 0 resulta

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad \int dx = \int v\cdot dt = \int \frac{v_0}{(v_0\cdot K\cdot t + 1)} = \frac{1}{K\cdot v_0}\cdot v_0\cdot Ln(v_0\cdot K\cdot t + 1) + cte$$

$$Como \quad cte = 0 \qquad x = \frac{1}{K}\cdot Ln(v_0\cdot K\cdot t + 1)$$

Aplicado a la situación del ciclista

$$K = 0{,}003\ S.I. \qquad v_0 = 36km/h = 10m/s$$

$$v = \frac{10}{10\cdot 0{,}003\cdot t + 1} = \frac{10}{0{,}03\cdot t + 1} \qquad x = \frac{1}{0{,}003}\cdot Ln(10\cdot 0{,}003\cdot t + 1) = \frac{1}{0{,}003}\cdot Ln(0{,}03\cdot t + 1)$$

$$Si \quad v = \frac{10}{2} = 5 \qquad 5 = \frac{10}{0{,}03\cdot t + 1} \qquad t = 33{,}3s \qquad x = \frac{1}{0{,}003}\cdot Ln(10\cdot 0{,}003\cdot 33{,}3 + 1) = 231m$$

$$Si \quad v = \frac{10}{4} = 2{,}5 \qquad 2{,}5 = \frac{10}{0{,}03\cdot t + 1} \qquad t = 100 \qquad x = \frac{1}{0{,}003}\cdot Ln(10\cdot 0{,}003\cdot 100 + 1) = 462m$$