Apéndice

Medidas más allá de la Tierra

Las Ciencias experimentales, entre las que están la Física y la Química tienen como método de conocimiento el denominado método científico.

En muchas ocasiones este método tiene como parte fundamental la experimentación que conlleva normalmente efectuar mediciones de distintas magnitudes con el objetivo de llegar a leyes que puedan expresarse de forma cuantitativa.

Medir es comparar, pero en muchas ocasiones, la medida directa por comparación no es fácil y debemos buscar vías indirectas de realizar las mediciones.

Tal vez te hayas preguntado alguna vez cómo se midió el tamaño de la Luna, la distancia de la Tierra al Sol, la masa de un planeta o la velocidad de la luz. Parece claro que esas distancias no se hicieron con una cinta métrica.

Este apéndice intenta mostrarte cómo la imaginación de algunos permitió una primera aproximación a medidas que no pueden hacerse tal y como mediríamos la longitud de una mesa o la masa de un saco de patatas.

Piensa que desde la Tierra, en relación a cuerpos lejanos sólo podemos medir directamente tiempos y o ángulos.

Así, podríamos medir el ángulo con que se ven dos estrellas desde la Tierra, o el tiempo que tarda el Sol en dar una vuelta alrededor de la Tierra. (Es lo mismo que se mueva la Tierra alrededor del Sol)

El recorrido que haré por las distintas medidas será por orden cronológico y aunque la trigonometría no era conocida en el momento de hacer las distintas medidas, la semejanza de triángulos permitió llegar a los mismos resultados.

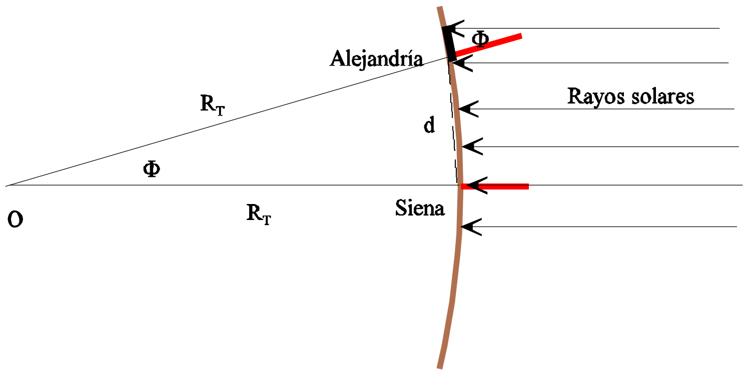
Los valores obtenidos en cada caso fueron sólo una primera aproximación a las medidas más allá de la Tierra, con errores digamos que aceptables, consecuencia de las hipótesis y aproximaciones realizadas y los errores cometidos en la medición de ángulos.

En cualquier caso, por ser las primeras medidas, tuvieron un gran valor dado que los resultados obtenidos nos dieron el orden de magnitud de las mismas.

- ***Radio terrestre***
- ***Radio lunar***
- ***Distancia Tierra- Luna***
- ***Distancias relativas de los planetas al Sol***
- ***Distancia Tierra- Marte y distancia Tierra-Sol***
- ***Masas de planetas y estrellas***
- ***La velocidad de la luz***

Radio terrestre

La primera de las medidas que abordaremos será la determinación del radio terrestre atribuida a Erastótenes unos 200 años antes de nuestra era.
Erastótenes conocía que en la población de Siena, próxima a la actual presa de Asuan en Egipto, el día del solsticio de verano los postes verticales, cuando el Sol estaba en su punto álgido, no daban sombra y en cambio eso no sucedía en Alejandría, ciudad egipcia al borde del Mediterráneo.
Las suposiciones que hizo para explicar este hecho fueron:
Que la Tierra era esférica Alejandría y Siena estaban en el mismo paralelo.
Que como el Sol está muy lejos podemos suponer que los rayos que llegan a la Tierra son paralelos.
Para medir la distancia entre ambas ciudades mandó desplazarse a un grupo de soldados, del que conocía su ritmo de marcha. Con el tiempo empleado calculó la distancia que resultó ser de unos 800km.
El esquema adjunto nos muestra los rayos solares incidiendo sobre ambas ciudades, con dos postes verticales de longitud L no representados a escala, cuando el poste en Siena no da sombra y sí lo hace en Alejandría.



Se nos forman dos triángulos.

Un triángulo, rectángulo en Alejandría, cuyos catetos son el poste y la sombra, y el ángulo Φ. Las longitudes de sus lados es pueden medir sin más y el ángulo lo midió con un transportador de ángulos, sistema poco preciso. El valor fue de unos 7,5º.
Con nuestros conocimientos trigonométricos podríamos calcularlo con más precisión.

$$tg\ \Phi = \frac{\text{longitud de la sombra}}{\text{longitud del poste}}$$

El otro triángulo tiene sus vértices en el centro de la Tierra y en las ciudades de Alejandría y Siena.
Observarás que el ángulo en O del triángulo es igual a Φ por tener sus lados paralelos.

Utilizando la semejanza de triángulos podemos escribir

$$\frac{\text{Longitud sombra}}{\text{Longitud poste}} = \frac{d}{R_T}$$

Con la aproximación de que d es la longitud medida por los soldados.
Todos los datos son conocidos menos el radio de la tierra.
Erastótenes llegó a un resultado con un error inferior al 15% del que tomamos hoy como radio medio de la Tierra que es de unos 6380km.

Si hubiéramos resuelto el problema con los conocimientos de trigonometría tendríamos.

Como la relación entre d y R_T es el ángulo Φ en radianes

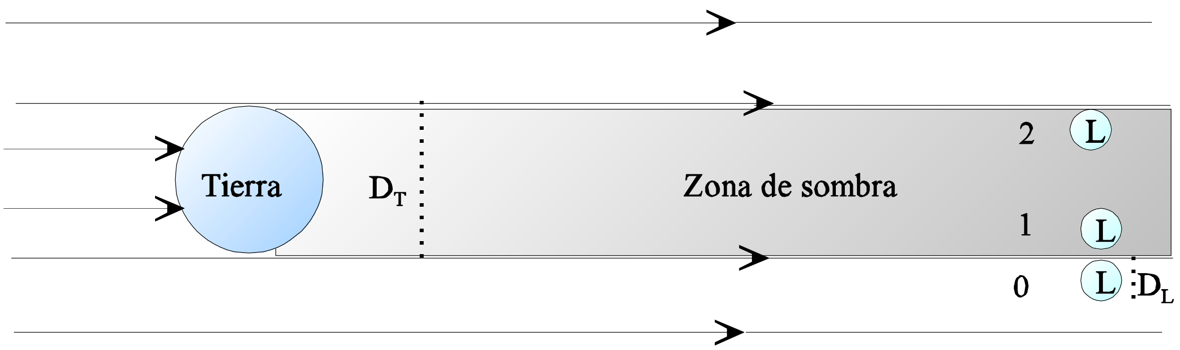
$$\Phi\,(rad) = \frac{d}{R_T}$$

$$R_T = \frac{d}{\Phi} = \frac{800km}{7{,}5\cdot\frac{2\pi}{360}} \approx 6000km$$

La medida es de una gran importancia pues a partir de ella se pudieron determinar otras más allá de nuestro planeta.

Radio lunar

La medida del radio lunar fue la primera realizada más allá de nuestro planeta, llevada a cabo por Aristarco.
Se hizo, como muchas otras observaciones a lo largo de la historia, aprovechando un eclipse de Luna.
Consideraron la aproximación de que la zona de sombra proyectada por la Tierra era cilíndrica y no tronco-cónica.
Dadas las distancias relativas, Sol- Tierra- Luna digamos que es aceptable.



El esquema adjunto nos muestra los rayos solares, la Tierra y la Luna, ésta en tres posiciones distintas, siendo D_T el diámetro terrestre ya medido y D_L el diámetro lunar que queremos determinar.

Posición 0.Es la posición inicial. La Luna empieza a entrar en la zona de sombra, empieza el eclipse de Luna. En ese momento un reloj en la Tierra marca t_0 .
Posición 1. La Luna acaba de entrar por completo en la zona de sombra. El reloj que pusimos en marcha marca t_1.
Posición 2. La Luna empieza a salir de la zona de sombra. El reloj que pusimos en marcha marca t_2.

Supongamos que la rapidez de la Luna ha sido la misma en todo su movimiento.
Aplicamos la ecuación del movimiento uniforme al intervalo de tiempo en que la Luna entra en la zona de sombra (t_1-t_0) y al intervalo que va desde que empieza a entrar hasta que empieza a salir(t_2-t_0) Podemos escribir:

$$D_L = v_{Luna} \cdot (t_1 - t_0) \qquad v_{Luna} = \frac{D_L}{t_1 - t_0}$$

$$D_T = v_{Luna} \cdot (t_2 - t_0) \qquad v_{Luna} = \frac{D_T}{t_2 - t_0}$$

Igualando

$$\frac{D_L}{t_1 - t_0} = \frac{D_T}{t_2 - t_0} \qquad D_L = D_T \cdot \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}$$

Por tanto el diámetro lunar, con las aproximaciones consideradas, pudo determinarse en función del diámetro terrestre y para ello sólo fue necesario medir los tiempos t_1 y t_2 desde la Tierra.
Como la relación entre ambos tiempos resultó ser aproximadamente de uno a cuatro,
el diámetro lunar es aproximadamente la cuarta parte del terrestre.

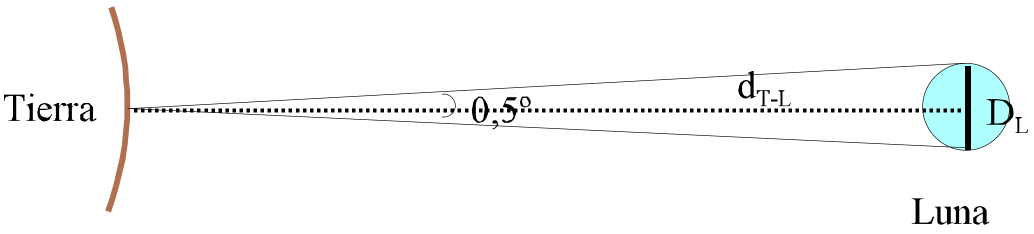
$$\boxed{D_L = \frac{1}{4} D_T}$$

Cuando se midió el diámetro terrestre, se pudo calcular el lunar.
La medida puede considerarse muy buena.

Distancia Tierra- Luna

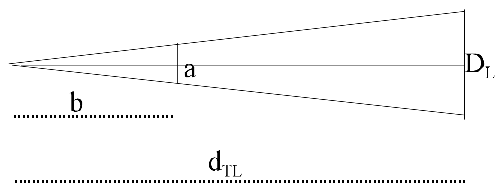
Una vez determinado el diámetro lunar, midiendo el ángulo Φ con que se ve la Luna desde la Tierra, utilizando la semejanza de triángulos o usando conocimientos elementales de trigonometría podemos calcular la distancia Tierra- Luna.

El esquema adjunto nos muestra, no a escala, la Luna vista desde la Tierra.
Están indicados en el mismo, el diámetro lunar D_L ya conocido, la distancia Tierra-Luna a determinar d_{TL} y el ángulo Φ con el que vemos la Luna desde la Tierra que es aproximadamente de 0,5º.



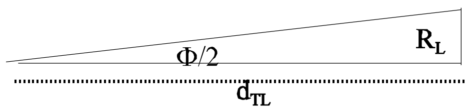
Como no conocían la trigonometría, pero sí el teorema de Tales, si tenemos dos triángulos como los representados se puede escribir:

$$\boxed{\frac{D_L}{d_{T-L}} = \frac{a}{b}}$$



Con a y b conocidos pues podemos dibujar un triángulo en la Tierra con el mismo ángulo Φ y medir los lados a y b.

Utilizando nuestros conocimientos trigonométricos en el triángulo formado por el radio lunar, la distancia Tierra-Luna y el ángulo Φ/2= 0,25º podemos escribir:



$$\frac{R_L}{d_{T-L}} = tg\ 0{,}25º$$

$$d_{TL} = \frac{R_L}{tg\ 0{,}25º} = \frac{D_L/2}{tg\ 0{,}25º} = \frac{D_L}{2 \cdot tg\ 0{,}25º} = \frac{D_T/4}{2 \cdot tg\ 0{,}25º} = \frac{D_T}{8 \cdot tg\ 0{,}25º} \approx 30 \cdot D_T$$

El resultado obtenido para la distancia Tierra-Luna fue que es de unas 30 veces el diámetro terrestre.

$$\boxed{d_{TL} \approx 30 \cdot D_T}$$

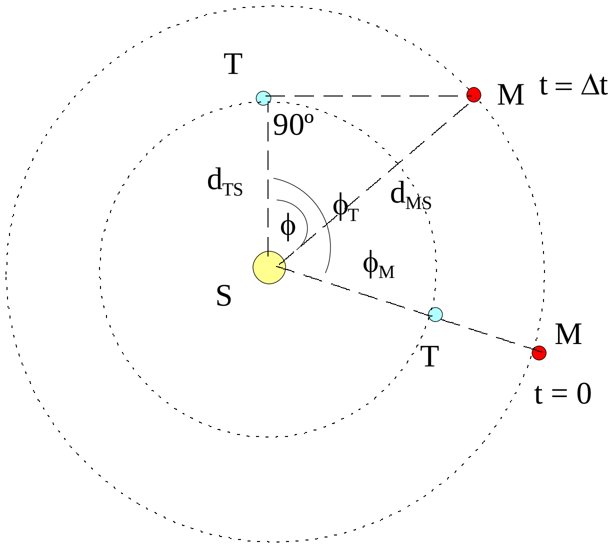
Cuando Erastótenes midió el radio terrestre se pudieron calcular el radio lunar y la distancia Tierra- Luna.

Distancias relativas de los planetas al Sol

Estas medidas son una muestra más del ingenio humano que entre otras consecuencias permitieron a Keppler enunciar su tercera ley referida al movimiento de los planetas alrededor del Sol que dice que los períodos al cuadrado son proporcionales al cubo del radio medio de las órbitas de los planetas.

Si bien la técnica es la misma en todos los casos, expondré como se determinó la relación entre la distancia Tierra- Sol a la que denominaremos unidad astronómica U.A. y la distancia Sol- Marte.

El esquema adjunto nos muestra al Sol, la Tierra y Marte cuando están alineados.
En ese momento Marte a medianoche está en lo alto del cielo.
Esa posición la tomaremos como origen de ángulos y de tiempos, t = 0.
Supondremos que ambas órbitas son circulares y que ambos planetas se mueven con velocidad angular constante.
Como la Tierra y Marte giran alrededor del Sol, el ángulo que forman el Sol, la Tierra y Marte STM inicialmente de valor 180º irá variando.
En el esquema se ha representado también la posición de la Tierra y Marte cuando el ángulo STM es de 90º, medida que podemos realizar desde la Tierra.
En el triángulo formado por los tres cuerpos celestes podemos determinar el ángulo Φ a partir de los movimientos de Marte y Tierra alrededor del Sol.
El ángulo es la diferencia entre el ángulo barrido por la Tierra en ese tiempo y el barrido por Marte.
El tiempo transcurrido es de unos 99 días entre la situación de oposición y aquella en que el ángulo con que se ven desde la Tierra el Sol y Marte es de 90º.



Como la Tierra tarda 365 días en dar una vuelta alrededor del Sol y Marte unos 687 días conocemos las velocidades angulares de ambos y podemos escribir:

$$\omega = \frac{2\cdot\pi}{T}$$

$$\varphi = \varphi_T - \varphi_M = \omega_T \cdot \Delta t - \omega_M \cdot \Delta t = \left(\frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_M}\right)\cdot \Delta t$$

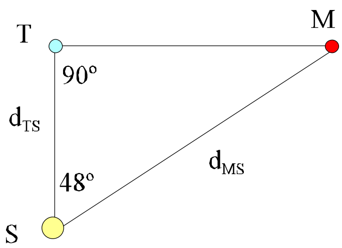
Medidas efectuadas desde la Tierra

$$T_T \approx 365 dias \qquad T_M \approx 687 dias \qquad \Delta t \approx 99 dias$$

Re *sulta*

$$\varphi \approx 48^{o} \approx 0{,}8 rad$$

En el triángulo formado por ambos planetas y el Sol, y con nuestros conocimientos trigonométrico podemos escribir:



$$\boxed{\cos 48^{\circ} = \frac{d_{TS}}{d_{MS}} \qquad d_{MS} = \frac{d_{TS}}{\cos 48^{\circ}} \approx 1{,}5 \cdot d_{TS} = 1{,}5\ U.A.}$$

El planeta Marte se encuentra a una distancia del Sol que es aproximadamente 1,5 veces la distancia que separa a la Tierra del Sol.

$$\boxed{d_{MS} = 1{,}5\ U.A.}$$

La medida, realizada de forma análoga para la determinación del resto de las distancias relativas de los planetas al Sol, permitió a Keppler enunciar su tercera ley experimental que sirvió de base a Newton para enunciar la ley de la gravitación universal.

Distancias relativas de los planetas al Sol

Planeta	*Distancia relativa en UA*
Mercurio	0,4
Venus	0,7
Tierra	1
Marte	1,5
Júpiter	5,2
Saturno	9,5
Urano	19,2
Neptuno	30,0

En el momento de la determinación de las distancias relativas al Sol, no se conocían ni Urano ni Neptuno.

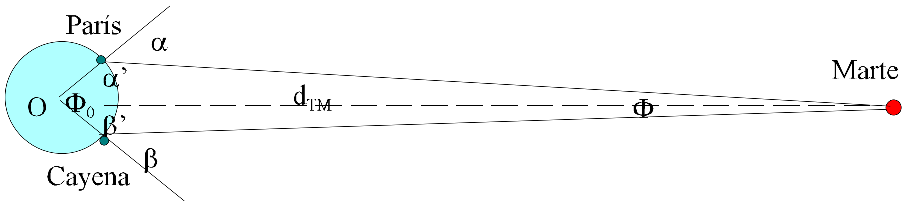
Cuando pueda calcularse la distancia de un planeta cualquiera al Sol, podremos calcular el resto de distancias.

Distancia Tierra-Marte y distancia Tierra-Sol

Para determinar la distancia de la Tierra a Marte, cuando ambos están en oposición, situación en la que están alineados con el Sol, Cassini ideó lo siguiente.
Observar a Marte en un mismo instante desde París y desde Cayena en la Guayana francesa, separados por unos 7000km, distancia del orden del radio terrestre.

El esquema adjunto nos muestra la posición de ambas poblaciones, Marte y la Tierra, no a escala para poder analizarlo mejor.

Dado que era conocida la distancia entre ambas poblaciones, también lo es el ángulo Φ_0 que forman los radios terrestres que pasan por ellas, siendo O el centro de la Tierra.



Desde ambas poblaciones se midieron los ángulos que formaban la visual a Marte con las respectivas verticales. Son los ángulos α y β del esquema.
Por tanto en el paralelogramo cuyos vértices son Marte, París, Cayena y el centro de la Tierra podemos calcular el ángulo Φ con que se vería desde Marte la distancia entre ambas ciudades, de valor semejante al radio terrestre.

$$\Phi + \Phi_0 + \alpha' + \beta' = 360^o$$

$$Como \qquad \alpha + \alpha' = 180 \quad y \qquad \beta + \beta' = 180 \qquad y \quad \Phi_{0(rad)} = \frac{d}{R_T} \quad \Phi_0 = \frac{d}{R_T} \cdot \frac{360^o}{2\pi}$$

Tenemos

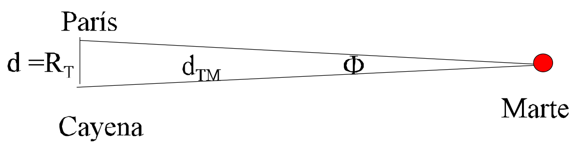
$$\Phi = 360 - (180 - \alpha) - (180 - \beta) - \Phi_0$$

Como todos los datos son conocidos

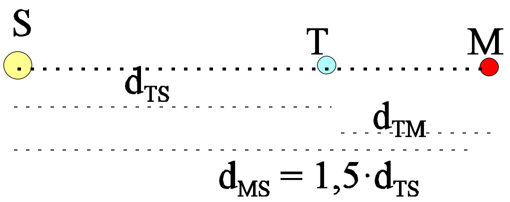
$$\text{Re}\,sulta \;\; \Phi = \frac{17}{360}^0$$

El ángulo Φ así calculado resultó ser de unos 17 segundos de grado.

Nuevamente resolviendo el triángulo isósceles París- Cayena-Marte , del que conocemos el ángulo en Marte y un lado, encontramos el valor de la distancia Tierra- Marte cuando están en oposición. El resultado de la medida fue de unos $64 \cdot 10^6$ km medida más que aceptable si hoy consideramos que su valor es de $78 \cdot 10^6$km.



Conocida la distancia Tierra - Marte cuando están en oposición como muestra el esquema adjunto, la distancia Tierra-Sol podemos calcularla a partir de las distancias relativas calculadas anteriormente.



$$d_{MS} = d_{TS} + d_{TM} \qquad d_{MS} = 1{,}5 \cdot d_{TS}$$

$$d_{TS} + d_{TM} = 1{,}5 \cdot d_{TS} \qquad d_{TM} = 0{,}5 \cdot d_{TS}$$

$$d_{TS} = \frac{d_{TM}}{0{,}5} \approx \frac{64 \cdot 10^6\, km}{0{,}5}$$

$$d_{TS} \approx 128 \cdot 10^6\, km$$

El valor obtenido no se encuentra muy alejado del valor que hoy tomamos como distancia media de la Tierra al Sol, la llamada unidad astronómica que es de $150 \cdot 10^6$ km.

Distancias medias de los planetas al Sol

Planeta	*Distancia aprox. al Sol (km)*
Mercurio	$60 \cdot 10^6$
Venus	$110 \cdot 10^6$
Tierra	$150 \cdot 10^6$
Marte	$230 \cdot 10^6$
Júpiter	$780 \cdot 10^6$
Saturno	$1430 \cdot 10^6$
Urano	$2870 \cdot 10^6$
Neptuno	$5900 \cdot 10^6$

Masas de planetas y estrellas

Para poder explicar el movimiento de los cuerpos celestes, y la caída de los cuerpos próximos a la superficie terrestre, Newton a partir de las leyes de Keppler especialmente la que relacionaba el período de revolución de los planetas con el radio medio de la órbita, enunció su ley de la gravitación universal.

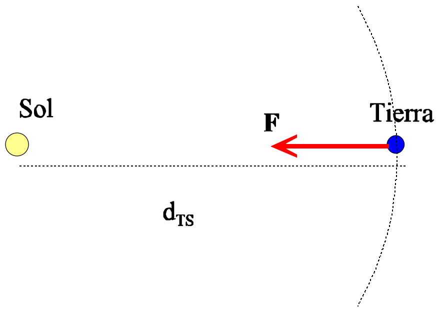
La ley de la gravitación universal dice que la fuerza responsable de esos movimientos es la fuerza gravitatoria que se ejercen ambos cuerpos, que es atractiva, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa los centros de los cuerpos y directamente proporcional al producto de una propiedad característica de los mismos, su masa gravitatoria.
Siendo G una constante llamada constante de gravitación universal.
El módulo de la fuerza es el indicado.

$$\boxed{F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}$$

Cuando, con medidas no exentas de dificultad, se consiguió determinar con experiencias en la Tierra por parte de Cavendish la constante de gravitación universal G, cuyo valor es $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ en el sistema internacional de unidades, se pudieron calcular las masas de cualquier estrella o planeta con algún cuerpo orbitando a su alrededor.

Masa del Sol

Calculemos, como ejemplo, la masa del Sol observando el movimiento del planeta Tierra a su alrededor.
El esquema adjunto nos muestra la fuerza que hace el Sol sobre la Tierra que describe una trayectoria que consideraremos circular de radio la distancia Tierra - Sol.



Si consideramos que la única fuerza que actúa sobre la Tierra es la ejercida por el Sol, aplicando el 2º principio de la dinámica en la dirección central, siendo ω_T la velocidad angular de la Tierra y T_T el período de revolución en su órbita, que es de unos 365 días, tenemos.

$$\sum \vec{F}_c = m \cdot \vec{a}_c \qquad F_c = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$G \cdot \frac{M_S \cdot M_T}{{d_{TS}}^2} = M_T \cdot {\omega_T}^2 \cdot d_{TS} = M_T \cdot \left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 \cdot d_{TS}$$

$$M_S = \frac{\left(\frac{2\pi}{T_T}\right)^2 \cdot {d_{TS}}^3}{G} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot {d_{TS}}^3}{G \cdot T_T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (150 \cdot 10^9)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 2 \cdot 10^{30}\,kg$$

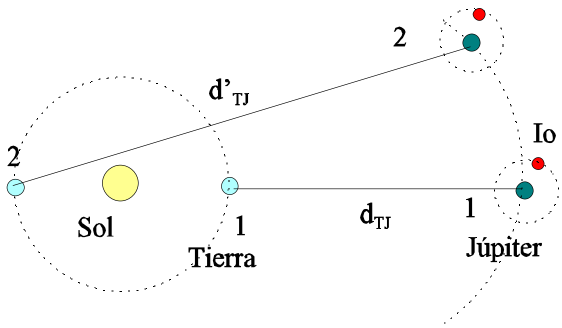
Este procedimiento es de aplicación a cualquier sistema que tenga cuerpos que orbiten alrededor suyo dado que el período de revolución se mide fácilmente desde la Tierra y hemos visto anteriormente cómo medir distancias más allá de la Tierra.

La velocidad de la luz

La controversia sobre si la luz se propagaba instantáneamente o lo hacía con una velocidad finita fue motivo de discusión a lo largo de la historia.

Galileo llevó a cabo un experimento para intentar medir la velocidad de la luz.
El experimento consistía básicamente en lo siguiente.
Dos personas se situarían en sendas cumbres separadas por una distancia conocida.
Uno de ellos haría una señal luminosa. Cuando el otro recibiera la señal haría a su vez otra y el primero mediría el tiempo transcurrido desde que hizo la primera señal.
El experimento fracasó porque como el tiempo transcurrido era demasiado pequeño, imposible de medir y los errores debidos a los tiempos de reacción eran muy superiores al tiempo empleado por la luz.
Parecía claro que para que el resultado de la determinación tuviera éxito, se debía medir el tiempo empleado por la luz en recorrer una distancia mucho mayor.

Römer llevó a cabo la medición de la velocidad de la luz observando a Io, uno de los satélites de Júpiter, cuyo periodo de revolución puede medirse fácilmente desde la Tierra y que es de unas 42h .



El esquema adjunto, no hecho a escala para una mejor interpretación, nos muestra en la posición señalada como 1, a la Tierra y a Júpiter cuando se encuentran en oposición. En esa situación están separados por una distancia d_{TJ}.
Transcurrido medio año la Tierra ha recorrido media órbita alrededor del Sol y en cambio Júpiter sólo una fracción bastante inferior de su órbita dado que su período de revolución es de unos 12 años.
En el esquema están representados en la posición 2.
Ahora la distancia Tierra - Júpiter es distinta d'_{TJ}
Si en la posición 1 observamos el momento en que Io aparece por detrás de Júpiter, si emplea 42 horas en dar una vuelta, lo veremos aparecer desde la Tierra cada 42h.
Pues bien, según va pasando el tiempo, Io se va retrasando en su aparición y el retraso es máximo cuando ha transcurrido medio año.
No es que Io vaya más lento, es que cuando Io aparece por detrás de Júpiter, la luz que viaja de Io a la Tierra tiene que recorrer cada vez más distancia.
Como había calculado cuando debería aparecer Io medio año después y mide un retraso Δt, supone que el mismo es debido al tiempo empleado por la luz en recorrer una distancia del orden del diámetro terrestre que es dos veces la distancia Tierra-Sol, unos trescientos millones de km, por lo que se puede escribir:

$$d'_{TJ} - d_{TJ} = c \cdot \Delta t$$
$$2 \cdot d_{TS} = c \cdot \Delta t$$
$$c = \frac{d_{TS}}{\Delta t}$$

Römer dio como resultado de su medida un valor de alrededor de $2 \cdot 10^5$km/s que aunque algo alejado del valor de $3 \cdot 10^5$ km/s que tomamos como bueno, es del orden de magnitud y sobre todo hizo ver que la luz no viajaba con rapidez infinita.