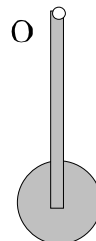


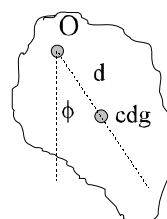
Mecánica 2º Bachillerato

Problemas resueltos de mecánica del sólido rígido

16. Calcula el centro de masas y el momento de inercia de un péndulo físico formado por una varilla homogénea de masa $m = 3\text{kg}$ y longitud $L = 2\text{m}$ que tiene sujeta en un extremo un disco homogéneo de masa $m' = 2\text{kg}$ y radio $R = 0,5\text{m}$ con respecto a un eje perpendicular al conjunto y que pasa por el extremo de la varilla O.



17. a- Demuestra que un péndulo físico, sólido rígido que puede oscilar alrededor de un punto O, si se separa de su posición de equilibrio un ángulo ϕ para el que sea válida la aproximación $\sin \phi \approx \phi$ se mueve realizando un movimiento armónico simple de período $T = 2 \cdot \pi (I / m \cdot g \cdot d)^{1/2}$ siendo d la distancia del centro de suspensión O al c.d.g.
b- Demuestra que el péndulo simple, partícula puntual sujeta por un hilo de longitud L, es un caso particular del péndulo físico.



c- Calcula el período del péndulo del problema anterior

d- Calcula el período del péndulo del problema 16 si desplazamos el disco 20cm hacia O.

16. Tomando como referencia el punto O, el centro de masas sólo tendrá componente vertical y llamando y a la distancia a ese punto, el centro de masas resulta:

$$y_{c.m.} = \frac{m \cdot \frac{L}{2} + m' \cdot L}{m + m'} = \frac{3 \cdot \frac{2}{2} + 2 \cdot 2}{3 + 2} = 1,4\text{m}$$

El cálculo para el apartado d del problema 17 nos da

$$y_{c.m.} = \frac{m \cdot \frac{L}{2} + m' \cdot x}{m + m'} = \frac{3 \cdot \frac{2}{2} + 2 \cdot 1,8}{3 + 2} = 1,32\text{m}$$

Calcularemos el momento de inercia del conjunto respecto a O sumando el de la varilla y el del disco utilizando asimismo el teorema de Steiner.

$$I_o = I_{o_v} + I_{o_d} = \frac{1}{3} \cdot m \cdot L^2 + \frac{1}{2} \cdot m' \cdot R^2 + m' \cdot L^2$$

$$I_o = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 2^2 = 12,25\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

El cálculo para el apartado d del problema 17 nos da:

$$I_o = I_{o_v} + I_{o_d} = \frac{1}{3} \cdot m \cdot L^2 + \frac{1}{2} \cdot m' \cdot R^2 + m' \cdot x^2$$

$$I_o = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 1,8^2 = 10,73\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

17.a Para la demostración representamos las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo que son la de la tierra y la del eje y aplicamos la ecuación fundamental de la dinámica de rotación con respecto al punto O.

Teniendo en cuenta que la reacción en O no ejerce momentos y los signos del momento de la fuerza gravitatoria, de la aceleración angular y del ángulo girado resulta:

$$\sum \vec{M}_O = I \cdot \vec{\alpha} \quad d \cdot m \cdot g \cdot \sin\phi = I \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$\text{Si } \phi \approx \sin\phi$$

$$d \cdot m \cdot g \cdot \phi = -I \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{m \cdot g \cdot d}{I} \cdot \phi = 0$$

Esta ecuación es formalmente idéntica a la del movimiento armónico simple por lo que tiene la misma solución y el péndulo físico para amplitudes pequeñas en que es válida la aproximación utilizada se mueve describiendo un m.a.s. cuyo período es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m} \cdot x = 0 \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}}$$

En el caso que nos ocupa tanto con el disco en el extremo de la varilla como desplazado hacia arriba los períodos correspondientes resultan:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{12,25}{5 \cdot 10 \cdot 1,4}} = 2,63s$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{10,73}{5 \cdot 10 \cdot 1,32}} = 2,53s$$

Observa que al desplazar el disco hemos modificado levemente el período del péndulo.

Para conseguir que los péndulos de pared que se utilizan como relojes no atrasen o adelanten se ajusta su período de oscilación subiendo o bajando la "lenteja".

En el caso del péndulo simple formado por un hilo de longitud L, sin masa, ésta se encuentra a una distancia L del punto O resulta.

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}} \quad \text{siendo } d = L \quad I = m \cdot L^2$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot L^2}{m \cdot g \cdot L}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Un péndulo real se aproximará más al péndulo simple cuando la masa no sea excesivamente voluminosa y la del hilo pueda despreciarse frente a ella.

