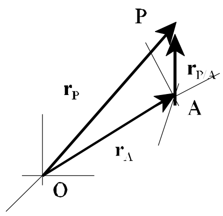
Mecánica 2º Bachillerato **Estudio de movimientos relativos**

Transformaciones de Galileo
Movimiento del sólido rígido
Velocidad de un punto del sólido
Aceleración de un punto del sólido
Métodos de resolución de problemas
Mecanismos

Consideremos dos puntos A y P en movimiento con respecto al observador "absoluto" O. El punto A es asimismo observador del movimiento de P.



La relación entre los vectores de posición es:

$\boxed{\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{P/A}}$ y $\boxed{\mathbf{r}_{P/A} = -\,\mathbf{r}_{A/P}}$

Si analizamos como cambian las posiciones con el tiempo derivando las expresiones anteriores resulta $d\mathbf{r}_P/dt = d\mathbf{r}_A/dt + d\mathbf{r}_{P/A}/dt$

$\boxed{\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A}}$ y $\boxed{\mathbf{v}_{P/A} = -\,\mathbf{v}_{A/P}}$

Si analizamos como cambian las velocidades con el tiempo derivando las expresiones anteriores resulta

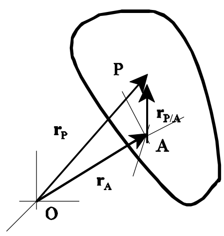
$\boxed{\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{P/A}}$ y $\boxed{\mathbf{a}_{P/A} = -\,\mathbf{a}_{A/P}}$

estas expresiones si los observadores miden el mismo tiempo se denominan transformaciones de Galileo y nos permiten relacionar los movimientos de dos puntos A y P.

Movimiento del sólido rígido

1. Velocidad de un punto del sólido

Supongamos ahora que los puntos A y P se encuentran en un sólido rígido y que los ejes ubicados en el punto A no rotan con respecto a los ejes en O (observador absoluto).



Como el módulo del vector $\mathbf{r}_{P/A}$ no cambia pues P y A están en un sólido rígido resulta que $\mathbf{v}_{P/A}$ sólo tiene componente transversal pues $d\mathbf{r}_{P/A}/dt = 0$. Por tanto $\mathbf{v}_{P/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A}$

Que sustituido nos resulta la relación entre las velocidades absolutas de dos puntos cualesquiera de un sólido rígido. $\boxed{\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A}}$

Si conocemos la velocidad de un punto cualquiera del sólido $\mathbf{v}_A$ y la velocidad angular del mismo $\boldsymbol{\omega}$ podremos determinar la velocidad de cualquier otro punto P de ese sólido.

Al conjunto ($\mathbf{v}_A$, $\boldsymbol{\omega}$) se le denomina grupo cinemático en A.

El vector velocidad angular es el mismo para cualquier observador en el sólido rígido que no rote sus ejes.

Si el punto P observara al punto A escribiría $\mathbf{v}_{A/P} = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}_{A/P} = \boldsymbol{\omega}' \times (-\mathbf{r}_{P/A})$

Que comparando con el resultado anterior $\mathbf{v}_{P/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A} = -\,\mathbf{v}_{A/P} = -\,\boldsymbol{\omega}' \times (-\mathbf{r}_{P/A})$ resulta $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'$.

2. Aceleración de un punto del sólido

Derivando la expresión $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A}$ Con le tiempo resulta

$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}_{P/A}/dt =$

$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{P/A})$

$$\boxed{\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/A} - \omega^2 \cdot \mathbf{r}_{P/A}}$$

Este resultado nos dice que la aceleración absoluta $\mathbf{a}_P$ de un punto P cualquiera de un sólido rígido puede escribirse como suma de tres términos

- $\mathbf{a}_A$ Aceleración absoluta de un punto A de referencia de ese sólido rígido.
- $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/A}$ Aceleración tangencial del punto P con respecto al punto A.
- $-\omega^2 \cdot \mathbf{r}_{P/A}$ Aceleración normal del punto P con respecto al punto A

Conclusión : El movimiento de un sólido rígido puede estudiarse como superposición de dos movimientos simultáneos, uno de traslación del sólido y otro de rotación alrededor de un punto cualquiera del sólido.
Se denomina grupo cinemático en un punto A al par $\mathbf{v}_A$ $\boldsymbol{\omega}$.
Conocido el grupo cinemático en un punto podemos calcular como se mueve cualquier punto del sólido.

Velocidad de deslizamiento v_d . Se define como el producto escalar de la velocidad de un punto por la velocidad angular. Observa que sale constante. $v_d = \mathbf{v}_P \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_A \cdot \boldsymbol{\omega} = cte$
Si los vectores $\mathbf{v}_A$ y $\boldsymbol{\omega}$ fueran perpendiculares la velocidad de deslizamiento es cero. $v_d = 0$

3. Resolución de problemas

a- Método de las velocidades relativas.
Conociendo la velocidad de un punto de un sólido y la velocidad angular del sólido en ese instante puede calcularse la velocidad de cualquier otro punto del sólido aplicando el resultado $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}\, x\, \vec{r}_{P/A}$ obtenido en el punto 1.

b- Método del centro instantáneo de rotación. CIR.
Consiste en encontrar un punto que no tiene porqué estar en el sólido tal que la velocidad en ese instante vista por un observador externo sea cero.
Con razonamientos geométricos, distancia de cualquier punto al CIR puede calcularse la velocidad de ese punto.

Existen otros métodos de resolución

4. Mecanismos

Podemos determinar, utilizando los métodos anteriores, cómo se mueven los elementos de algunos mecanismos formados por sólidos enlazados.