

Mecánica 2º Bachillerato**Determinación de centros de masas y de gravedad por integración**

A continuación se exponen detalladamente dos ejemplos de cálculos de centros de masas por integración

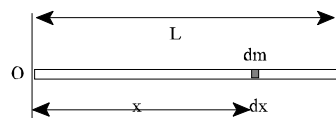
- 1- Varilla homogénea recta de masa m y longitud L
2. Superficie triangular isósceles y homogénea.

Si el cuerpo no es muy extenso $\mathbf{g}$ es la misma para todos los elementos de masa por lo que el c.m. coincide con el c.d.g.

1- Varilla homogénea recta de masa m y longitud L

Como todas las masas están sobre la varilla recta el c.m. estará en un punto de la misma. Por ello tomaremos un observador para el que la varilla esté en el eje X con el origen en el extremo izquierdo por lo que $y_{c.m.}=0$; $z_{c.m.}=0$ y sólo necesitaremos determinar $x_{c.m.}$ y resolver

$$x_{c.m.} = \frac{\int x \cdot dm}{m}$$



Por ser homogénea la varilla la relación entre la masa de un trozo y la longitud del mismo ha de ser constante lo cual sirve para toda la varilla $m/L = \text{cte}$ (Densidad lineal de masa λ)

La integral que debemos calcular tiene dos variables que son dm y x , pues si cambiamos el elemento de masa dm cambia su posición x .

Para poder efectuar el producto $x \cdot dm$ la distancia del trozo debe estar definida, es decir que para todo el elemento de masa la x sea la misma.

La clave de la resolución del problema está en tomar un elemento de masa que nos permita resolver la integral

Por ello en este caso tomaremos como elemento de masa dm un trozo de varilla de espesor tan pequeño como queramos dx para que todo él lo podamos considerar que está en la posición x . (ver esquema)

Como el sistema es homogéneo $m/L = dm/dx$

si despejamos dm y sustituimos en la integral tenemos

$$x_{c.m.} = \frac{\int x \cdot dm}{m} = \frac{\int x \cdot \frac{m}{L} dx}{m} = \frac{m}{L \cdot m} \int x \cdot dx = \frac{1}{L} \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^L = \frac{L}{2}$$

El centro de masas nos ha salido donde ya suponíamos en el centro de la varilla homogénea.

2. Superficie triangular isósceles y homogénea.

Datos: masa m , base b y altura H

La simetría del sistema permite decir que el c.m. se encontrará en un punto de la perpendicular sobre el lado b . Tomaremos un observador tal que el c.m. esté sobre el eje y siendo $x_{c.m.} = 0$ $z_{c.m.} = 0$. La única integral a resolver será:

$$y_{c.m.} = \frac{\int y \cdot dm}{m}$$

Tomaremos como elemento de masa dm el representado que es paralelo al eje X , a una distancia y del mismo y de espesor dy .

Por ser homogéneo el triángulo $\frac{dm}{dS} = \frac{dm}{a \cdot dy} = \frac{m}{\frac{b \cdot H}{2}}$ Relacionando a y b $\frac{a}{b} = \frac{H-y}{H}$

Si despejamos dm

$$dm = \frac{2 \cdot a \cdot m \cdot dy}{b \cdot H} = \frac{2 \cdot b \cdot \frac{(H-y)}{H} \cdot m \cdot dy}{b \cdot H} = \frac{2 \cdot (H-y) \cdot m \cdot dy}{H^2}$$

Y sustituimos en la integral resulta

$$y_{c.m.} = \frac{\int y \cdot dm}{m} = \frac{1}{m} \int \frac{y \cdot 2 \cdot (H-y) \cdot m \cdot dy}{H^2} = \frac{2}{H^2} \int y \cdot (H-y) \cdot dy = \frac{2}{H^2} \left(H \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right)_0^H = \frac{2}{H^2} \left(H \cdot \frac{H^2}{2} - \frac{H^3}{3} \right) = \frac{H}{3}$$

Por tanto el centro de masas y el cdg de un triángulo isósceles se encuentra sobre la altura del lado distinto a $1/3$ de la base.

