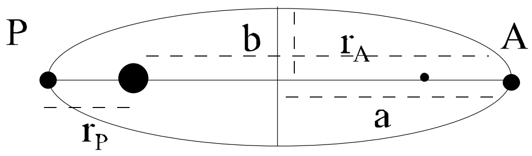
Física 2º Bachillerato **Órbita elíptica**

Vamos a demostrar que la energía mecánica de un satélite de masa m en órbita elíptica alrededor de un planeta de masa M viene dada por la expresión adjunta siendo a el semieje mayor de la elipse

$$\boxed{E = -\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M\cdot m}{a}}$$

El esquema adjunto muestra la trayectoria de un satélite en órbita elíptica alrededor de un planeta en uno de los focos de la elipse, siendo A el afelio y P el perihelio, a el semieje mayor de la elipse, y r_a y r_P la distancia del satélite al planeta en esos puntos



Demostración

Nos fijaremos por tanto en el satélite cuando se encuentra en el perihelio y en el afelio con las siguientes consideraciones:

1. La relación entre las distancias del satélite al planeta en el perihelio y el afelio con el semieje mayor de la elipse

2. Que como el satélite se mueve sometido a una fuerza central no varía el momento angular orbital del mismo por lo que $\boxed{L_{Perihelio} = L_{Afelio}}$

3. Que como la fuerza gravitatoria es conservativa la energía mecánica es la misma en todos los puntos por lo que $\boxed{E_{Perihelio} = E_{Afelio}}$

Las ecuaciones que resultan son

$r_P + r_A = 2\cdot a$ Despejando $r_P = 2\cdot a - r_A$

$r_P\cdot m\cdot v_P = r_A\cdot m\cdot v_A$ Despejando $v_P = \dfrac{r_A\cdot v_A}{r_P}$

$\dfrac{1}{2}\cdot m\cdot {v_P}^2 - \dfrac{G\cdot M\cdot m}{r_P} = \dfrac{1}{2}\cdot m\cdot {v_A}^2 - \dfrac{G\cdot M\cdot m}{r_A}$ Simplificando y reordenando

$$\frac{1}{2}\left(v_P^2 - v_A^2\right) = G\cdot M\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Sustituyendo v_P resulta

$\dfrac{1}{2}\left(v_A^2\cdot\dfrac{r_A^2}{r_P^2} - v_A^2\right) = G\cdot M\left(\dfrac{1}{r_P} - \dfrac{1}{r_A}\right)$ Despejando v_A y reordenando resulta

$$v_A^2 = \frac{2\cdot G\cdot M\cdot\left(\dfrac{r_A - r_P}{r_A\cdot r_P}\right)}{\left(\dfrac{r_A^2}{r_P^2} - 1\right)} = \frac{2\cdot G\cdot M\cdot\left(\dfrac{r_A - r_P}{r_A\cdot r_P}\right)}{\left(\dfrac{(r_A + r_P)\cdot(r_A - r_P)}{r_P^2}\right)} = \frac{2\bullet G\cdot M\cdot r_P}{r_A\cdot(r_A + r_P)} = \frac{2\bullet G\cdot M\cdot(2\cdot a - r_A)}{r_A\cdot 2\cdot a} = 2\cdot G\cdot M\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2\cdot a}\right)$$

Si hubiéramos sustituido v_A en función de v_P el resultado sería análogo

$$v_P^2 = 2\cdot G\cdot M\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{2\cdot a}\right)$$

Por lo tanto la energía mecánica, suma de la potencial gravitatoria y de la cinética, en los puntos A y P resulta ser

$$E_{mA} = -\frac{G\cdot M\cdot m}{r_A} + \frac{1}{2}\cdot m\cdot 2\cdot G\cdot M\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{2\cdot a}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M\cdot m}{a}$$

$$E_{mP} = -\frac{G\cdot M\cdot m}{r_P} + \frac{1}{2}\cdot m\cdot 2\cdot G\cdot M\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{2\cdot a}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M\cdot m}{a}$$

Que es la misma que en el resto de puntos de la trayectoria elíptica y de valor

$$\boxed{E = -\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M\cdot m}{a}}$$