

Mecánica 2º Bachillerato

Cinemática del punto

- 1- Introducción. Relatividad del movimiento
- 2- Vector de posición. Trayectoria
- 3- Vector desplazamiento. Espacio recorrido
- 4- Vector velocidad media
- 5- Vector velocidad instantánea. Concepto. Relación del mismo con la trayectoria y con el espacio recorrido.
- 6- Vector aceleración media.
- 7- Vector aceleración instantánea. Concepto
- 8- Relación del vector aceleración con la trayectoria:
Componentes intrínsecas. Aceleración normal y tangencial
- 9 - Estudio de movimientos sobre una recta:
Uniforme, Uniformemente acelerado; Armónico simple.
- 10- Estudio de movimientos en el plano. Tiros parabólicos
- 11- Estudio del movimiento circular
- 12- Estudio de un movimiento desde distintos sistemas de referencia.
Transformaciones de Galileo.

1 - Introducción

Imposibilidad de determinar el movimiento o reposo absoluto y la necesidad de tenerlo que referir siempre a un observador al que por comodidad se le asocia un sistema de coordenadas cartesianas desde el que estudiaremos el movimiento .

El concepto de tiempo y los problemas que plantea.

A lo largo del tema consideraremos a los móviles puntuales, es decir sin dimensiones. En realidad no existe ningún cuerpo puntual, pero en ciertas condiciones cuerpos tan grandes como una estrella podrán considerarse como tales y en ocasiones uno tan pequeño como una puerta que se abre, no.

2- Vector de posición

Dado un observador al que asociaremos un sistema de referencia cartesiano definimos vector de posición $\mathbf{r}$ de un móvil puntual para ese observador al vector cuyo origen se encuentra en el origen de coordenadas del observador y su extremo en la posición del móvil.

Un observador distinto con otro sistema de referencia dará otro vector de posición.

Si el móvil modifica su posición con respecto al observador su vector de posición $\mathbf{r}$ dependerá del tiempo y escribiremos $\mathbf{r}(t)$. Para conocer la posición de un móvil en cualquier instante deberemos conocer la función $\mathbf{r}(t)$.

Habitualmente la función $\mathbf{r}(t)$ vendrá expresada en coordenadas cartesianas de la forma:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$
 donde x, y, z serán funciones del tiempo denominándolas componentes del vector de posición.

Dado que este vector depende del observador, las magnitudes que deriven del mismo también dependerán de él.

Denominamos trayectoria de un móvil puntual al conjunto de puntos por los que pasa el móvil, es decir el lugar geométrico de puntos barridos por el extremo del vector de posición.

(Notar que la forma de la trayectoria depende del observador)

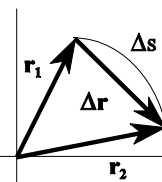
3- Vector desplazamiento

Definimos vector desplazamiento entre dos puntos 1 y 2 al cambio que experimenta el vector de posición entre esos dos puntos.

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

Definimos el espacio recorrido por el móvil entre dos puntos a la longitud de la trayectoria descrita por el mismo entre ambos. Lo representaremos por Δs

Notar que el módulo del vector desplazamiento no tiene que coincidir con el espacio recorrido.



4- Vector velocidad media

Definimos vector velocidad media a la relación entre el vector desplazamiento entre dos puntos y el tiempo invertido en efectuar ese desplazamiento .

$$\mathbf{v}_m = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) / (t_2 - t_1) = \Delta \mathbf{r} / \Delta t$$

Observa que este vector tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento.

Llamamos velocidad media (escalar) a la relación entre el espacio recorrido y el tiempo invertido. Dado que $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s$ resulta que $|\mathbf{v}_m| \neq v_m$

5- Vector velocidad instantánea

Dado que en un intervalo finito de tiempo la posición puede cambiar de múltiples maneras interesa definir un vector velocidad media en un intervalo de tiempo suficientemente pequeño.

Definimos el vector velocidad instantánea a la relación entre el vector desplazamiento entre dos puntos y el tiempo invertido en efectuarlo cuando tomamos un intervalo de tiempo tan pequeño como queramos.

Matemáticamente lo expresamos:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Si tuviéramos $\mathbf{r}$ en coordenadas cartesianas y los vectores $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ no dependieran del tiempo resultaría:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= d/dt (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (dx/dt) \cdot \mathbf{i} + (dy/dt) \cdot \mathbf{j} + (dz/dt) \cdot \mathbf{k} \\ &= v_x \cdot \mathbf{i} + v_y \cdot \mathbf{j} + v_z \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$

siendo v_x, v_y y v_z las componentes cartesianas del vector velocidad.

Observa que el vector velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en cada punto de la misma por lo que, si llamamos $\boldsymbol{\tau}$ a un vector unitario tangente a la trayectoria en todos los puntos, el vector $\mathbf{v}$ podría escribirse como

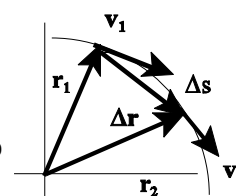
$$\mathbf{v} = v \cdot \boldsymbol{\tau} \text{ siendo } v \text{ el módulo de la velocidad, también denominado celeridad.}$$

Observa asimismo que cuando $\Delta t \rightarrow 0$ resulta que el módulo del vector desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$ y el espacio recorrido sobre la trayectoria Δs coinciden y la definición de velocidad introducida en el curso anterior y en éste no son contradictorias.

$$\text{Es decir } v = |\Delta \mathbf{r}| / \Delta t = \Delta s / \Delta t \quad (\text{Cuando } \Delta t \rightarrow 0)$$

Conocido el vector velocidad en función del tiempo la posición del móvil vendrá dada por:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt \quad d\mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot dt \quad \mathbf{r} = \int \mathbf{v} \cdot dt$$



6- Vector aceleración media

Definimos vector aceleración media en un intervalo de tiempo a la relación entre el cambio que experimenta el vector velocidad y el intervalo de tiempo invertido en el mismo.

$$\mathbf{a}_m = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) / (t_2 - t_1) = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$$

7-Vector aceleración instantánea

Para conseguir una mejor información de cómo se modifica la velocidad definimos vector aceleración instantánea a la relación entre el cambio que experimenta el vector velocidad y el intervalo de tiempo invertido en efectuarlo cuando el intervalo de tiempo es suficientemente pequeño (El intervalo tiende a cero)

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Con el vector de posición y por tanto el vector velocidad en coordenadas cartesianas y los vectores **i, j, k**, no dependieran del tiempo la aceleración resultaría:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= d/dt (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) = dv_x/dt \cdot \mathbf{i} + dv_y/dt \cdot \mathbf{j} + dv_z/dt \cdot \mathbf{k} = \\ &= a_x \cdot \mathbf{i} + a_y \cdot \mathbf{j} + a_z \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$

A los términos a_x, a_y, a_z , los denominaremos componentes cartesianas del vector aceleración.

Conocido el vector aceleración en función del tiempo la velocidad del móvil vendrá dada por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt \quad \vec{v} = \int \vec{a} \cdot dt \quad \vec{r} = \int \vec{v} \cdot dt$$

8- Componentes intrínsecas del vector aceleración

Vamos a estudiar la relación entre el vector aceleración y la trayectoria seguida por el móvil y para ello vamos a escribir el vector velocidad en relación con la trayectoria. $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$

Si aplicamos la definición de aceleración y las reglas de derivación resulta:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

-Analicemos esta ecuación en la que el primer miembro es una aceleración y por tanto cada uno de los dos términos del segundo miembro ha de ser una aceleración siendo la suma de ambos términos la aceleración del móvil.

-El término $dv/dt \cdot \vec{\tau}$ es un vector tangente a la trayectoria por lo que lo denominaremos vector aceleración tangencial $\mathbf{a}_t$, cuyo módulo es dv/dt por ser $\vec{\tau}$ unitario.

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \quad \vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}$$

Este término será distinto de cero cuando cambie el módulo de la velocidad y será cero cuando el módulo de la velocidad sea constante.

-El término $v \cdot d\vec{\tau}/dt$ será cero cuando no cambie la dirección de la trayectoria es decir en los movimientos rectilíneos ($\vec{\tau}$ constante) y será distinto de cero en los movimientos no rectilíneos.

Al efectuar la derivada para calcular este 2º término resulta un vector perpendicular a la trayectoria y dirigido hacia la concavidad de valor

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}$$

Siendo ρ el radio de curvatura de la trayectoria en ese punto y $\vec{n}$ un vector unitario normal a la trayectoria y dirigido hacia la concavidad. (Ver demostración posterior).

Dado que es un vector aceleración y además normal a la trayectoria lo denominaremos vector aceleración normal.

Así pues escribiremos el vector aceleración como suma de dos vectores perpendiculares entre sí, uno tangente y otro normal a la trayectoria a los que denominaremos componentes intrínsecas del vector aceleración.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \quad \text{Siendo } a_t = dv/dt \quad \text{y} \quad a_n = v^2 / R$$

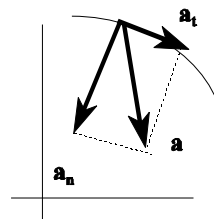
Observa que $a^2 = a_t^2 + a_n^2$

-En un movimiento rectilíneo y uniforme las dos componentes son cero.

-En cualquier otro movimiento rectilíneo, incluyendo el m.r.u.a., como no cambia la dirección del mismo la aceleración no tiene componente normal y la aceleración es tangencial (Tiene la dirección de la trayectoria, que es recta).-

-En un movimiento circular uniforme la aceleración sólo tiene componente normal.

-En un movimiento distinto a éstos la aceleración tendrá las dos componentes



8b. Cálculo del valor de la aceleración normal a_n

Para ello deberemos calcular

$$a_n = v \cdot d\tau / dt = v \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\tau / \Delta t \quad \text{cuando } \Delta t \rightarrow 0$$

- Dirección y sentido :

Observa que en el límite el vector resultante tiende a ser perpendicular a la trayectoria y dirigido hacia la concavidad ya que si los puntos 1 y 2 están tan próximos como queramos el ángulo ϕ que forman tiende a cero y los otros dos ángulos del triángulo al ser iguales por ser isósceles tienden a 90° .

Por tanto $\Delta\tau$ es perpendicular a la trayectoria y a_n tiene su misma dirección y sentido

- Módulo:

Para calcular el módulo del vector notemos que los dos triángulos representados son isósceles y semejantes entre sí.

El menor es isósceles por tener dos catetos de módulo 1.

El mayor está construido trazando las perpendiculares a la trayectoria por los puntos 1 y 2. El punto en que se cortan lo denominaremos centro de curvatura de la trayectoria en ese intervalo y el ángulo que forman las dos rectas en el mismo es igual a ϕ por haberse trazado con dos perpendiculares a los lados del triángulo menor.

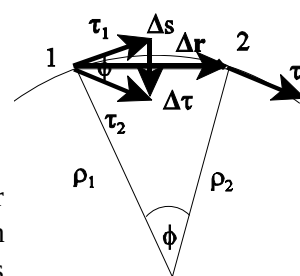
Asimismo en el límite ρ_1 y ρ_2 tienden a ser iguales

Por tanto en el límite si utilizamos la semejanza de los triángulos nos resulta

$$a_n = v \cdot |\Delta\tau| / \Delta t = v \cdot |\Delta r| / \Delta t \cdot 1/R$$

Como en el lím $|\Delta r| = \Delta s$ y $\Delta s / \Delta t = v$ sustituyendo resulta

$$a_n = v \cdot v \cdot 1/R = v^2 / R \quad \text{y el vector aceleración normal } \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}$$



Conclusión:
$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}$$

9- Movimientos rectilíneos:

Para estudiar un movimiento sobre una recta será conveniente tomar un observador que tenga un eje en la dirección del movimiento, con lo que los vectores posición, velocidad y aceleración sólo tendrán una componente en la dirección de ese eje.

Asignaremos un origen en el eje, fijando en él de forma arbitraria el sentido positivo. Así la posición, la velocidad y la aceleración vendrán dadas por un número, que será el módulo de las mismas y un signo que nos indicará el sentido.

9.1-Movimiento rectilíneo y uniforme : Se define como aquél que su velocidad no varía por lo que coincide con la velocidad media.

$$v_m = v = (x - x_0) / (t - t_0) \quad \text{que despejando queda}$$

$$x = x_0 + v \cdot t \quad \text{si llamamos } t \text{ al intervalo de tiempo.}$$

Como v es constante resulta $dv/dt = 0$ por lo que $a = 0$

9.2-Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado : Se define como aquél que tiene aceleración constante, por lo que la aceleración instantánea coincide con la aceleración media.

$$a_m = a = (v - v_0) / (t - t_0) \quad \text{que despejando queda}$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Para determinar la posición será necesario encontrar una función $x = f(t)$ que al derivar nos de la función correspondiente a la velocidad.

Observa que la ecuación:

$x = x_0 + v_0 \cdot t + 1/2 \cdot a \cdot t^2$ es la que responde a este tipo de movimiento si x_0 es una constante que representa la posición inicial del móvil

Dado que al derivarla con el tiempo queda:

$$dx/dt = v_0 + a \cdot t = v \quad \text{que es la ecuación esperada.}$$

9.3- Movimiento armónico simple:Ecuación del m.a.s rectilíneo

Considera una partícula que se va a mover sobre el eje X siguiendo la ecuación

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta) \quad \text{siendo } A, \omega \text{ y } \delta \text{ constantes}$$

Significado físico de las constantes:

A Observa que $A = x$ cuando $\sin(\omega \cdot t + \delta) = 1$ por tanto $A = x_{\text{máx.}}$

A representa la máxima elongación de la partícula (distancia al origen)

δ Observa que cuando $t = 0$

$$x_0 = A \sin \delta \quad \text{por tanto } \delta \text{ tiene que ver con el origen de tiempos.}$$

Si tomamos $t = 0$ cuando $x = 0$ entonces $\delta = 0$

ω Como la función seno es periódica (repite sus valores de forma regular) vamos a determinar el tiempo que empleará el móvil en repetir situación.

Para que $x_1 = x_2$ es necesario que $\sin(\omega \cdot t_1 + \delta) = \sin(\omega \cdot t_2 + \delta)$

condición que se cumple si $(\omega \cdot t_2 + \delta) - (\omega \cdot t_1 + \delta) = n \cdot 2\pi$ siendo n un nº entero

Si despejamos resulta $t_2 - t_1 = n \cdot 2\pi / \omega$

Definimos período T de un m.a.s. al menor intervalo de tiempo necesario para que el móvil repita la situación. En la ecuación anterior debe ser $n = 1$.

Por tanto $T = 2\pi / \omega$ o bien $\omega = 2\pi / T$

Velocidad y aceleración del m.a.s.

A partir de la ecuación de la posición, y derivando dos veces con respecto al tiempo resulta:

$$v_x = dx/dt = A \cdot \omega \cos(\omega \cdot t + \delta)$$

Observa que cuando la posición es máxima la velocidad es nula y viceversa.

$$a_x = dv_x/dt = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \delta) = -\omega^2 x$$

Observa que cuando la posición es nula también lo es la aceleración y que posición y aceleración toman los valores máximos simultáneamente pero de sentido contrario.

Dinámica del m.a.s. Si una partícula puntual describe un m.a.s. como $a_x = -\omega^2 x$ la fuerza resultante es: $F_x = m \cdot a_x = -m \cdot \omega^2 x = -K \cdot x$ siendo $K = \text{cte} = m \cdot \omega^2$

10- Estudio de movimientos en el plano. Tiros parabólicos

Aquí consideraremos un observador con dos ejes de referencia perpendiculares entre sí y en el plano del movimiento.

Estudiaremos el movimiento en el plano como la superposición de dos movimientos en direcciones perpendiculares.

El origen de coordenadas y los criterios de signos deben introducirse para cada eje y son igualmente arbitrarios como en el caso de movimientos rectilíneos.

En los movimientos de cuerpos sometidos sólo a la influencia de la Tierra y en las proximidades de su superficie será muy conveniente tomar uno de los ejes en la dirección vertical y el otro perpendicular y por tanto horizontal.

En la dirección horizontal, si despreciamos el rozamiento con el aire, el movimiento será uniforme, y en la dirección vertical, si sólo actúa la fuerza gravitatoria el cuerpo se moverá con la aceleración de la gravedad g , dirigida hacia abajo y de valor aproximado 10 m/s^2 por lo que será un movimiento uniformemente acelerado.

11- Estudio del movimiento circular

Diremos que un movimiento es circular cuando un observador ve que la trayectoria descrita por el móvil es una circunferencia de radio R .

Ángulo girado o desplazamiento angular:

Si un móvil se encuentra en el punto 1 y se desplaza hasta el punto 2 por el tramo de circunferencia indicado denominamos desplazamiento angular al ángulo descrito

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad \text{Unidades S.I. radianes.}$$

De la definición de ángulo en radianes tenemos $\Delta s = R \cdot \Delta\phi$

Velocidad angular media:

Es la relación entre el ángulo girado y el tiempo invertido.

$$\omega_m = \Delta\phi / \Delta t$$

Velocidad angular instantánea

La relación entre el ángulo girado y el tiempo invertido cuando el intervalo de tiempo es suficientemente pequeño.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\phi / \Delta t = d\phi / dt \quad \text{Unidades S.I. rad/s (s}^{-1}\text{)}$$

Aceleración angular media:

Es la relación entre el cambio de la velocidad angular y el tiempo invertido en efectuarlo

$$\alpha_m = \Delta\omega / \Delta t$$

Aceleración angular instantánea :

Es la relación entre el cambio de velocidad angular y el tiempo invertido cuando el intervalo de tiempo es tan pequeño como queramos.

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\omega / \Delta t = d\omega / dt \quad \text{Unidades S.I. rad/s}^2 \text{ (s}^{-2}\text{)}$$

Relación entre las magnitudes lineales y las angulares:De la definición de ángulo en radianes $\Delta s / R = \Delta \phi$

Obtenemos

$$\Delta s = R \cdot \Delta \phi$$

Dividiendo por Δt y calculando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ (derivando)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s / \Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (R \cdot \Delta \phi / \Delta t)$$

$$v = R \cdot \omega$$

Si volvemos a derivar la última expresión nos queda

$$dv/dt = d/dt (R \cdot \omega)$$

$$a_t = R \cdot \alpha$$

Casos particulares de movimientos circulares:*a- Uniforme*Aquél en que la velocidad angular es constante y por tanto $\omega = \omega_m$ A partir de la definición de ω_m obtenemos

$$\phi = \phi_0 + \omega t$$

b- Uniformemente acelerado

Aquél en que la aceleración angular es constante y por tanto

$$\alpha = \alpha_m$$

A partir de la definición de α_m obtenemos

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Y el desplazamiento angular queda

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + 1/2 \cdot \alpha t^2$$

c- Caso general

Conocida la aceleración angular de un móvil podemos determinar su velocidad angular y su posición angular

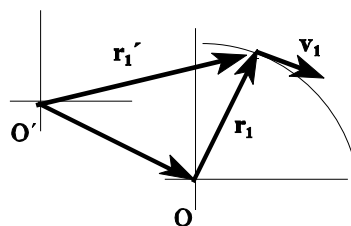
$$\alpha = d\omega/dt \quad \omega = \int \alpha \cdot dt \quad \omega = d\phi/dt \quad \phi = \int \omega \cdot dt$$

A las magnitudes angulares ϕ, ω, α se les asigna un pseudo-vector ϕ, ω, α de módulo el correspondiente a la magnitud, de dirección la del eje de giro y de sentido la regla del sacacorchos.Con estos criterios comprueba que $\omega \times r = v$ Y que $a_n = \omega \times (\omega \times r)$ **12- Transformaciones de Galileo**

Dado que la posición de un móvil depende del observador, puede suceder que las magnitudes que hemos derivado de la misma dependan también del observador.

(Relatividad del movimiento)

Para relacionar dos observadores podemos escribir, aplicando la suma de vectores y derivando dos veces con el tiempo las siguientes relaciones denominadas transformaciones de Galileo.



$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}_{o/o'}$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{o/o'}}{dt}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_{o/o'} = \vec{v} + \vec{v}_r$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}$$

$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_r$$