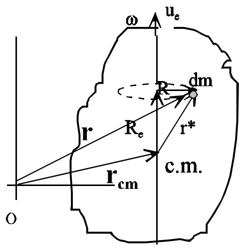
Mecánica 2º Bachillerato

SÓLIDO RÍGIDO

Vamos a ver que un sólido rígido bajo el punto de vista de la dinámica y la energía puede estudiarse al igual que hemos visto en el estudio cinemático como la superposición de dos movimientos, uno de traslación de su centro de masas y otro de rotación alrededor del centro de masas.

Para ello estudiaremos la energía cinética, el momento lineal y el momento angular de un sólido en movimiento, visto por un observador externo y en el análisis también lo veremos tal y como lo ve un observador en el centro de masas.



1. Energía cinética del sólido rígido. Momento de inercia con respecto a un eje.

Partimos de la definición de la energía cinética de un sólido rígido vista por un observador externo con origen en el punto O.

$$E_c = \int \frac{1}{2}\cdot v^2 \cdot dm = \int \frac{1}{2}(\vec{v}\cdot\vec{v})\cdot dm = \int \frac{1}{2}\left(\vec{v}_{cm}+\vec{v}^*\right)\left(\vec{v}_{cm}+\vec{v}^*\right)\cdot dm = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{cm}^2 + \int \frac{1}{2}\cdot v^{*2}\cdot dm + 0 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{cm}^2 + \int \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{\omega}\ \mathrm{x}\ \vec{\mathrm{r}}^*\right)^2\cdot dm = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{cm}^2 + \int \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{\omega}\ \mathrm{x}\ (\vec{\mathrm{R}}_e+\vec{\mathrm{R}})\right)^2\cdot dm =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{cm}^2 + \int \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{\omega}\ \mathrm{x}\ \vec{\mathrm{R}})\right)^2\cdot dm = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{cm}^2 + \int \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{\omega}\ \mathrm{x}\ \vec{\mathrm{R}}\right)\cdot\left(\vec{\omega}\ \mathrm{x}\ \vec{\mathrm{R}}\right)\cdot dm =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{cm}^2 + \int \frac{1}{2}\cdot\omega^2\cdot R^2\cdot dm = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\cdot\omega^2\cdot\int R^2\cdot dm = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\cdot I\cdot\omega^2}$$

Energía cinética del s.r.

Por tanto la energía cinética de un sólido rígido vista por un observador externo, puede considerarse como suma de dos términos:

El primero se corresponde a la energía que tendría un cuerpo puntual de masa la del sólido rígido moviéndose con la velocidad del centro de masas ,energía cinética de traslación.

El segundo término representa la energía cinética que vería un observador en el centro de masas que lo único que puede ver es una rotación del sólido con velocidad angular ω.

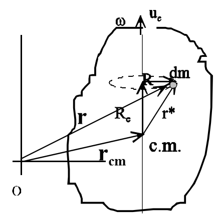
En esa expresión aparece el término I, denominado momento de inercia de un sólido rígido con respecto a un eje, depende de la masa del cuerpo y de la distancia R que separa cada masa del eje de giro respecto al que está girando el cuerpo, viene dado por la expresión

$$\boxed{I = \int R^2\cdot dm}$$

Momento de inercia del s.r.

2. Momento lineal del sólido rígido

Partimos de la definición de momento lineal de un sólido rígido visto por el observador externo.



$$\vec{p} = \int \vec{v} \cdot dm = \int \left(\vec{v}_{cm} + \vec{v}^{*}\right) \cdot dm = m \cdot \vec{v}_{cm} + \int v^{*} \cdot dm = m \cdot \vec{v}_{cm} + 0$$

$$= m \cdot \vec{v}_{cm}$$

El resultado nos indica que el momento lineal es el que correspondería a un partícula de masa la del sólido moviéndose con la velocidad del centro de masas.

Nota que el momento lineal del sólido visto desde el centro de masas es siempre cero.

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}_{cm}}$$ **Momento lineal del s.r.**

3. Momento angular del sólido rígido

Partimos de la definición de momento angular de un sólido rígido con respecto a un punto O.

$$\vec{L} = \int \vec{r} x \vec{v} \cdot dm = \int (\vec{r}_{cm} + \vec{r}^{*}) x (\vec{v}_{cm} + \vec{v}^{*}) dm =$$

$$= \int \vec{r}_{cm} x \, \vec{v}_{cm} dm + \int \vec{r}^{*} x \, v^{*} dm + 0 + 0 = \vec{r}_{cm} x \, m \cdot \vec{v}_{cm} + \int \vec{r}^{*} x \, v^{*} dm$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{trasl} + \vec{L}_{rot}$$

El resultado nos indica que el momento angular de un sólido rígido con respecto a un observador O, puede escribirse como la suma de dos términos,

El primer término es el momento angular de una partícula de masa la del sólido rígido, ubicada en el centro de masas moviéndose como él. Es el momento angular de traslación del sólido.

El segundo término es el momento angular que vería un observador subido en el centro de masas, lo que corresponderá al momento angular de la rotación del sólido visto desde el c.m.

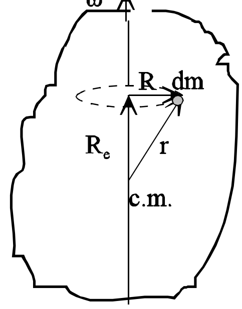
$$\boxed{\vec{L}_{tras} = \vec{r}_{cm} x \, m \cdot \vec{v}_{cm}}$$ **Momento angular de traslación**

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{trasl} + \vec{L}_{rot}}$$ **Momento angular**

- **Cálculo del momento angular de un sólido rígido en rotación con respecto a un eje que pasa por su centro de masas.**

(Para simplificar la notación este caso los vectores **r** y **v** son los vectores de posición y velocidad de un elemento vistos desde el centro de masas)

El esquema adjunto representa un sólido rígido que gira con velocidad angular ω alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masas.



Consideramos un elemento de masa dm cuyo vector de posición con respecto al c.m. es **r** y que describirá una trayectoria circular de radio R (línea de puntos) por estar el sólido rotando alrededor del eje representado.

Cálculo de **L**

$$\vec{L} = \int \vec{r} x\, \vec{v} \cdot dm = \int (\vec{R} + \vec{R}_e) x[\vec{\omega}\, x(\vec{R} + \vec{R}_e)] \cdot dm = \int (\vec{R} + \vec{R}_e) x(\vec{\omega}\, x\, \vec{R}) \cdot dm =$$

$$= \int \vec{R}\, x(\vec{\omega}\, x\vec{R}) \cdot dm + \int \vec{R}_e\, x(\vec{\omega}\, x\vec{R}) \cdot dm = \int R^2 \cdot \vec{\omega} \cdot dm + 0 =$$

$$= I \cdot \vec{\omega}$$

La integral cuyo resultado hemos dado como valor cero sólo lo es en algunos casos.
(Lo es si el eje es un tipo de eje denominado eje principal, que tenga suficiente simetría).
En este curso las rotaciones siempre serán alrededor de un eje principal por lo que el momento angular de un sólido rígido viene dado por la expresión

$$\boxed{\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}}$$ **Momento angular de rotación**

Siendo I el momento de inercia del sólido rígido con respecto al eje de giro

- **Conclusión**

Por tanto el momento angular de un sólido rígido que se traslada y que gira alrededor de un eje principal viene dado por

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r}_{cm}\, x\, m \cdot \vec{v}_{cm} + I \cdot \vec{\omega}}$$ **Momento angular**

Correspondiendo el primer sumando a la traslación y el segundo a la rotación.

4. El 2º Principio de la dinámica aplicado a un sólido rígido

El 2º principio de la dinámica aplicado a una partícula los hemos escrito de las tres formas siguientes

$$\boxed{\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad \sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Veamos como quedan estas expresiones para un sólido rígido.

4.1 A partir de la definición de la aceleración del centro de masas

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\int \vec{a} \cdot dm}{m} = \frac{\int d\,\vec{F}}{m} = \frac{\sum \vec{F}_{ext} + \sum \vec{F}_{\text{int}}}{m} = \frac{\sum \vec{F}_{ext}}{m}$$

4.2 Analicemos como cambia el momento lineal de un sólido rígido con el tiempo

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v}_{cm})}{dt} = m \cdot \vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}_{ext}$$

4.3 Analicemos cómo cambia el momento angular de un sólido rígido con el tiempo.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{\int \vec{r}x\vec{v}\cdot dm}{dt} = \int (\vec{v}x\vec{v})\cdot dm + \int \vec{r}x\vec{a}dm = 0 + \int \vec{r}xd\vec{F} = \int d\vec{M} = \sum \vec{M}_{ext} + \sum \vec{M}_{\text{int}} = \sum \vec{M}_{ext}$$

Nota: Los momentos internos son cero sólo si las fuerzas internas tienen la dirección de las partículas que interaccionan. Es el caso de las fuerzas de contacto, las gravitatorias y las eléctricas.

4.4 Calculemos cómo cambia el momento angular de un sólido rígido en rotación alrededor de un eje principal

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\cdot\vec{\omega})}{dt} = I\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\cdot\vec{\alpha}$$

Combinando los dos últimos resultados obtenemos que para un sólido rígido en rotación

$$\sum \vec{M}_{ext} = I\cdot\vec{\alpha}$$

4.5 **Conclusión**:
Por tanto para un sólido rígido nos queda el 2º principio

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = m\cdot\vec{a}_{cm}}$$

Esta ecuación nos permite conocer cómo se mueve el centro de masas de un sólido rígido conociendo las causas visto por un observador inercial y es de aplicación a cualquier movimiento de traslación de un sólido.
Se la denomina ecuación fundamental de la dinámica de la traslación.

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Esta ecuación es de utilidad cuando no actúan fuerzas externas sobre un sólido pues nos indica que si no hay fuerzas externas, o suman cero, se conserva el momento lineal del sólido y que la velocidad de su centro de masas permanece constante.

$$\boxed{\sum \vec{M}_{ext} = I\cdot\vec{\alpha}}$$

Esta ecuación nos permite conocer cómo gira un sólido rígido alrededor de un eje principal conociendo las causas. Es de utilidad para estudiar rotaciones de un sólido rígido.
Se la denomina ecuación fundamental de la dinámica de la rotación.

5. Movimientos combinados de traslación y rotación

¿Cómo estudiar una situación en que un sólido rígido describa un movimiento superposición de una traslación y una rotación? Ej: Rueda rodando por un plano inclinado.
Como hemos visto las magnitudes **p**, **L** y Ec pueden considerarse como suma de dos términos, uno correspondiente a la traslación y otro a la rotación.
Paso1: Aplicaremos la ecuación fundamental de la dinámica de la traslación tal y como lo vería un observador externo inercial.
Paso 2: Aplicaremos la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación para un observador en el centro de masas.*

Paso 3: Relacionaremos los movimientos de traslación y rotación.(v_{cm} con ω)

* Las leyes de la dinámica sólo son válidas para un observador inercial pues un observador no inercial para aplicarlas debe introducir la fuerza de inercia cuyo valor es $\boxed{F_i = - m \cdot \mathbf{a}}$
En la mayoría de situaciones el centro de masas tendrá aceleración por lo que será un observador no inercial. Pero aún sin serlo puede aplicar la ecuación fundamental de la dinámica de la rotación considerando sólo los momentos de las fuerzas que vería un observador inercial, sin tener en cuenta las fuerzas de inercia. La razón está en que las fuerzas de inercia se aplican en el centro de masas del sólido por lo que su momento con respecto al centro de masas es cero.

Aviso: Tener mucho cuidado a la hora de resolver los problemas en no aplicar la ecuación fundamental de la dinámica de rotación tomando como punto para el cálculo de la suma de momentos uno que tenga aceleración y no sea el centro de masas.

6. El Teorema de la energía aplicado al sólido rígido

No tiene diferencias sustanciales con el teorema aplicado a las partículas.
La energía cinética será la suma de la correspondiente a la traslación y a la rotación y para el cálculo de la energía potencial gravitatoria se deberá tener en cuenta el cambio de posición que experimenta el centro de gravedad, que coincide con el centro de masas.

7. Principio de conservación del momento angular

El momento angular de un sólido o un conjunto se conserva en algunas situaciones
a- Si la suma de momentos que actúan sobre un sólido rígido es cero, su aceleración angular es cero y su velocidad angular permanece constante.
b- Si un cuerpo que gira sin momentos externos, puede modificar su momento de inercia con respecto al eje de giro, modificará su velocidad angular (Bailarina girando si aleja sus brazos del eje de giro)

Si $\Sigma \mathbf{M}_{ext} = 0$, $\mathbf{L} = I \cdot \boldsymbol{\omega} = cte$. Si I aumenta, ω disminuye y a la inversa

c- Si dos sólidos chocan o una partícula puntual choca con un sólido que puede girar alrededor de un eje fijo el momento angular del conjunto permanecerá constante pues la fuerza del eje no ejerce momentos con respecto al punto por el que pasa el eje y las fuerzas que se ejercen entre los cuerpos que chocan suman cero y al ser de contacto están aplicadas en puntos contiguos, sus momentos suman cero.

8. Equilibrio del sólido rígido. Estática

Si las fuerzas y los momentos que actúan sobre un sólido rígido suman cero, la velocidad del centro de masas es cero y la velocidad angular también lo es para un observador, decimos que el sólido rígido está en equilibrio con respecto a ese observador.