Mecánica 2º Bachillerato **DINÁMICA**

Esquema resumen de los términos utilizados en el estudio de la dinámica del sólido rígido.

1. PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS MATERIALES

1a. Partícula material o sistema puntual. Sistema que no tiene dimensiones		
Un observador define los siguientes términos para una partícula		
Masa	m	Propiedad de la partícula que mide la dificultad para cambiar su movimiento
Vector de posición	$\mathbf{r}$	Vector con origen en el observador y extremo en la posición del punto
Vector velocidad	$\mathbf{v}$	$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$
Vector aceleración	$\mathbf{a}$	$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$
Vector momento lineal	$\mathbf{p}$	$\mathbf{p} = m\cdot \mathbf{v}$
Vector momento angular con respecto a un punto O	$\mathbf{L}_0$	$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times m\cdot \mathbf{v}$
Energía cinética	E_c	$E_c = ½\cdot m\cdot v^2$

1b. Sistema de partículas. Sistema formado por un conjunto finito de partículas puntuales		
Un observador define los siguientes términos para un sistema de partículas sin dimensiones		
Masa	m	$m = \Sigma\, m_i$
Centro de masas		Punto del espacio definido por su vector de posición
Vector de posición c.m.	$\mathbf{r}_{\mathbf{c.m.}}$	$\mathbf{r}_{\mathbf{c.m.}} = 1/m\cdot \Sigma\, m_i \cdot \mathbf{r}_i$
Vector velocidad c.m.	$\mathbf{v}_{cm}$	$\mathbf{v}_{\mathbf{cm}} = d\mathbf{r}_{\mathbf{cm}}/dt$ $\quad \mathbf{v}_{\mathbf{c.m.}} = 1/m \cdot\Sigma\, m_i \cdot\mathbf{v}_i$
Vector aceleración c.m.	$\mathbf{a}_{cm}$	$\mathbf{a}_{\mathbf{cm}} = d\mathbf{v}_{\mathbf{cm}}/dt$ $\quad \mathbf{a}_{\mathbf{c.m.}} = 1/m\cdot\Sigma\, m_i \cdot\mathbf{a}_i$
Vector momento lineal	$\mathbf{p}$	$\mathbf{p} = \Sigma\, m_i \cdot \mathbf{v}_i = m \cdot \mathbf{v}_{cm}$
Vector momento angular con respecto a un punto O	$\mathbf{L}_0$	$\mathbf{L}_0 = \Sigma\, \mathbf{r}_\mathbf{i} \times m\cdot \mathbf{v}_i$
Energía cinética	E_c	$E_c = \Sigma\, ½\cdot m_i \cdot v_i^{\,2}$

1c. Sólido rígido: Sistema extenso rígido formado por infinidad de elementos de masa dm		
Un observador define los siguientes términos para un sólido rígido		
Masa	m	$m = \int_v dm$
Centro de masas		Punto del espacio que cumple con...
Vector de posición c.m.	$\mathbf{r}_{c.m.}$	$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m}\int_V \vec{r} \cdot dm$
Vector velocidad c.m.	$\mathbf{v}_{cm}$	$\mathbf{v}_{cm} = d\mathbf{r}_{cm}/dt$ $\vec{v}_{cm} = \frac{1}{m}\int_V \vec{v} \bullet dm$
Vector aceleración c.m.	$\mathbf{a}_{cm}$	$\mathbf{a}_{cm} = d\mathbf{v}_{cm}/dt$ $\vec{a}_{cm} = \frac{1}{m}\int_V \vec{a} \cdot dm$
Vector momento lineal	**p**	$\vec{p} = \int_V \vec{v} \cdot dm$
Vector momento angular con respecto a un punto O	$\mathbf{L}_0$	$\vec{L} = \int_V \vec{r} x \vec{v} dm = \int_V \vec{r} x d\vec{p} = I \cdot \vec{\omega}$
Energía cinética	E_c	$E_c = \int_V \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot dm = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$
Momento de inercia con respecto a un eje	I	$I = \int_v R^2 \cdot dm = m \cdot r_g^2$

2. CAUSAS DE LOS MOVIMIENTOS: **Fuerzas y magnitudes derivadas**		
Fuerza	**F**	Causa capaz de cambiar el movimiento de un cuerpo o deformarlo
Resultante de un conjunto de fuerzas	Σ **F**	Suma de todas las fuerzas que actúan sobre un sistema Σ**F**
Momento de una fuerza con respecto a un punto	$\mathbf{M}_0$	$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
Impulso de una fuerza *Impulso* angular	**I** **H**	$\vec{I} = \int \vec{F} \cdot dt$ $\vec{H} = \int \vec{M} \cdot dt$
Trabajo realizado por una fuerza entre dos puntos a lo largo de una trayectoria	W	$W_a^b = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{tray} F_t \cdot ds = \int M \cdot d\varphi$
Potencia desarrollada por una fuerza	P	$P = dW/dt = F_t \cdot v = M \cdot \omega$

3. RELACIÓN ENTRE LAS CAUSAS Y EL MOVIMIENTO DE LOS SISTEMAS

3.1 Segunda ley de la dinámica

Aplicable a...	*Partícula*	*Sistema de partículas*	*Sólido rígido*
Traslación	$\Sigma\, \mathbf{F} = m\cdot \mathbf{a}$	$\Sigma\, \mathbf{F_{ext}} = m\cdot \mathbf{a_{cm}}$	$\Sigma\, \mathbf{F_{ext}} = m\cdot \mathbf{a_{cm}}$
Traslación	$\Sigma\, \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$	$\Sigma\, \mathbf{F_{ext}} = d\mathbf{p}/dt$	$\Sigma\, \mathbf{F_{ext}} = d\mathbf{p}/dt$
Rotación sólido	$\Sigma\, \mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$ *	$\Sigma\, \mathbf{M_{ext}} = d\mathbf{L}/dt$	$\Sigma\, \mathbf{M_{ext}} = I \cdot \alpha$

* Útil en el estudio de movimientos no rectilíneos de partículas especialmente cuando están sometidas a fuerzas centrales

3.2 Teorema de la energía: Trabajo de la resultante

	Partícula	*Sistema de partículas*	*Sólido rígido*
W de la resultante	$W_R = \Delta E_c$	$^*W_R = \Delta E_c$	$^*W_R = \Delta E_c$
W de las fuerzas no conservativas	$W_{fnc} = \Delta E$ $E = E_c + E_p$	$^*W_{fnc} = \Delta E$ $E = E_c + E_p$	$^*W_{fnc} = \Delta E$ $E = E_c + E_p$

* En el término $^*W_R$ está incluido el trabajo realizado por las fuerzas internas, pues aunque suman cero, por el tercer principio de la dinámica, actúan sobre sistemas distintos y la suma de esos trabajos no tiene porqué ser cero.

3.2 Teorema del impulso: Impulso de la resultante

	Partícula	*Sistema de partículas*	*Sólido rígido*
Impulso de la resultante	$\mathbf{I}_R = \Delta\, \mathbf{p}$	$\mathbf{I}_R = \Delta\, \mathbf{p}$	$\mathbf{I}_R = \Delta\, \mathbf{p}$

3.3 Principios de conservación

	Partícula	*Sistema de partículas*	*Sólido rígido*
Principio de conservación del momento lineal			
Si $\Sigma\, \mathbf{F} = 0$	$\mathbf{p}$ = cte $\mathbf{v}$ = cte	$\mathbf{p}$ = cte $\mathbf{v}_{cm}$ = cte	$\mathbf{p}$ = cte $\mathbf{v}_{cm}$ = cte
Principio de conservación del momento angular			
Si $\Sigma\, \mathbf{M} = 0$	$\mathbf{L}$ = cte	$\mathbf{L}$ = cte	$\mathbf{L}$ = cte
Principio de conservación de la energía mecánica			
Si $^*W_{fnc} = 0$	E = cte	E = cte	E = cte

Si las fuerzas suman cero se conserva el momento lineal de un sistema.
Si los momentos de las fuerzas suman cero se conserva el momento angular de un sistema.
Si las fuerzas no conservativas no hacen trabajo se conserva la energía mecánica.
En la resolución de problemas es especialmente útil preguntarse si alguna magnitud física **p**, **L** o $E_{mecánica}$ se conserva para plantear el problema sobre esa base.

Movimiento general del sólido rígido

El movimiento de un sólido rígido puede estudiarse bajo el punto de vista dinámico como la superposición de dos movimientos. La traslación del centro de masas del sólido superpuesta a la rotación del sólido alrededor del c.m. aunque éste sea un sistema no inercial

$\boxed{W_{fnc} = \Delta E}$

Teorema de la energía

$\boxed{\Sigma \mathbf{F}_{\mathbf{ext}} = m \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{cm}}}$

Dinámica de la traslación del sólido

$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_{\mathbf{ext}} = I \cdot \alpha}$

Dinámica de la rotación del sólido

Fuerzas conservativas: energía potencial.
Son fuerzas conservativas aquellas cuyo trabajo entre dos puntos es independiente de la trayectoria seguida o que el trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada cualquiera es cero.
Se define diferencia de energía potencial entre dos puntos asociada a una fuerza conservativa al trabajo realizado por la misma cambiado de signo. $W_{fc} = -\Delta E_p$

Rozamiento por rodadura
Las fuerzas de rozamiento por rodadura no realizan trabajo porque no se desplazan.
(Se ejercen en el centro instantáneo de rotación CIR que tiene velocidad cero)

Momentos de inercia

Cálculos de momentos de inercia

Consiste en resolver la integral $I = \int_v R^2 \cdot dm$

Algunos momentos de inercia de sistemas homogéneos con respecto a ejes que pasan por su c.m.

$\boxed{I_{aro} = mR^2}$ $\boxed{I_{disco} = \frac{1}{2} mR^2}$ $\boxed{I_{varilla} = 1/12 mL^2}$ $\boxed{I_{esfera} = 2/5\, mR^2}$

Teorema de Steiner
Relación entre el momento de inercia de un sistema con respecto a un eje y su valor con respecto a otro paralelo que pasa por su c.m separado por una distancia d..

$\boxed{I_E = I_{c.m.} + md^2}$