Mecánica 2º Bachillerato ***Problemas resueltos de Cinemática***

27. *Coordenadas polares en el plano*
Una partícula se mueve en el plano XY siendo su distancia al origen de coordenadas $r = 2\cdot\vartheta$ *y el ángulo que forma con ele eje x* $\vartheta = t^2$ *S.I.*
a- Determina la velocidad de la partícula utilizando coordenadas polares
b- Determina la velocidad de la partícula utilizando coordenadas cartesianas
c- Determina la aceleración de la partícula utilizando coordenadas polares
d- Determina la aceleración de la partícula utilizando coordenadas cartesianas.
e- Determina sus valores cuando $\vartheta = 60^o$

a. Cálculo de la velocidad en coordenadas polares

$$r = 2\cdot\vartheta \qquad \vartheta = t^2$$

$$r = 2\cdot t^2 \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\cdot t^2\right) = 4\cdot t \qquad \omega = \frac{d\vartheta}{dt} = 2\cdot t$$

$$\vec{r} = r\cdot\vec{u}_r \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\cdot\vec{u}_r + r\cdot\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\cdot\vec{u}_r + r\cdot\omega\cdot\vec{u}_\vartheta$$

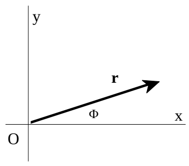
$$\vec{v} = 4\cdot t\cdot\vec{u}_r + 4\cdot t^3\cdot\vec{u}_\vartheta$$

Para un ángulo de 60º

$$\vartheta = 60^o = \frac{\pi}{3} \qquad \frac{\pi}{3} = t^2 \qquad t = \sqrt{\frac{\pi}{3}} = 1{,}02s \qquad \vec{v} = 4\cdot 1{,}02\cdot\vec{u}_r + 4\cdot 1{,}02^2\cdot\vec{u}_\vartheta$$

$$\vec{v} = 4{,}09\cdot\vec{u}_r + 4{,}28\cdot\vec{u}_\vartheta m/s$$

b. La velocidad en coordenadas cartesianas será:



$$x = r\cdot\cos\vartheta = 2\cdot t^2\cdot\cos t^2 \qquad v_x = \frac{dx}{dt} = 4\cdot t\cdot\cos t^2 - 2\cdot t^2\cdot 2\cdot t\cdot sen t^2 = 4t\cos t^2 - 4t^3 sen t^2$$

$$y = r\cdot sen\vartheta = 2\cdot t^2\cdot sen t^2 \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = 4\cdot t\cdot sen t^2 + 2\cdot t^2\cdot 2\cdot t\cdot\cos t^2 = 4t sen t^2 + 4t^3\cos t^2$$

$$Para\,\vartheta = 60^o = \frac{\pi}{3} \qquad t^2 = \frac{\pi}{3} \qquad t = 1{,}02 \qquad sen t^2 = sen\frac{\pi}{3} = 0{,}866 \qquad \cos t^2 = \cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$$

$$\vec{v} = \left(4\cdot 1{,}02\cdot 0{,}5 - 4\cdot 1{,}02^3\cdot 0{,}86\right)\vec{i} + \left(4\cdot 1{,}02\cdot 0{,}86 - 4\cdot 1{,}02^3\cdot 0{,}5\right)\cdot\vec{j}$$

$$\vec{v} = -1{,}66\cdot\vec{i} + 5{,}68\cdot\vec{j} m/s$$

c. Cálculo de la aceleración en coordenadas polares

$$\vec{v} = 4 \cdot t \cdot \vec{u}_r + 4 \cdot t^3 \cdot \vec{u}_\vartheta \qquad \omega = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{dt^2}{dt} = 2t$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4 \cdot \vec{u}_r + 4 \cdot t \cdot \frac{d\vec{u}_r}{dt} + 12 \cdot t^2 \cdot \vec{u}_\vartheta + 4 \cdot t^3 \cdot \frac{d\vec{u}_\vartheta}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4 \cdot \vec{u}_r + 4 \cdot t \cdot \omega \cdot \vec{u}_\vartheta + 12 \cdot t^2 \cdot \vec{u}_\vartheta + 4 \cdot t^3 \cdot \omega \cdot \left(-\vec{u}_r\right)$$

$$\vec{a} = \left(4 - 8t^2\right) \cdot \vec{u}_r + \left(8t^2 + 12t^2\right) \cdot \vec{u}_\vartheta \qquad \vec{a} = \left(4 - 8t^2\right) \cdot \vec{u}_r + 20 \cdot t^2 \cdot \vec{u}_\vartheta m / s^2$$

$$Para \qquad t = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

$$\vec{a} = -4{,}77 \cdot \vec{u}_r + 20{,}94 \cdot \vec{u}_\vartheta m / s^2 \qquad a = 21{,}48 m / s^2$$

d. Cálculo de la aceleración en coordenadas cartesianas

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d\left(4 \cdot t \cdot \cos t^2 - 4 \cdot t^3 \cdot sent^2\right)}{dt} = \left(4 - 8 \cdot t^4\right) \cdot \cos t^2 - 20 \cdot t^2 \cdot sent^2$$

$$Cuando \qquad t = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \quad \cdot \quad a_x = -2{,}385 - 20{,}95 \cdot 0{,}86 = -20{,}53 m / s^2$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d\left(4 \cdot t \cdot sent^2 + 4 \cdot t^3 \cdot \cos t^2\right)}{dt} = \left(4 - 8 \cdot t^4\right) \cdot sent^2 + 20 \cdot t^2 \cdot \cos t^2$$

$$Cuando \qquad t = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \qquad a_y = -4{,}77 \cdot 0{,}86 + 20{,}95 \cdot 0{,}5 = 6{,}36 m / s^2$$

$$\vec{a} = -20{,}53 \vec{i} + 6{,}36 \vec{j} m / s^2$$