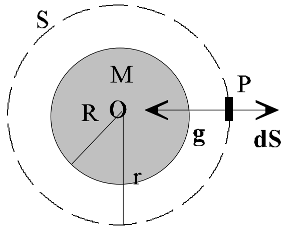
Física 2º Bachillerato **Campos**

Aplicación del Teorema de Gauss

Cálculo del campo gravitatorio creado por una masa M distribuida homogéneamente sobre una esfera de radio R.
a- En puntos exteriores a la esfera.
b- En puntos interiores a la esfera
c- Esfera cargada

a- Puntos exteriores a la esfera. r > R



Para calcular el campo en un punto P exterior a la esfera situado a una distancia r del centro de la misma, r > R observemos que podemos tomar una superficie cerrada esférica de radio r en la que por razones de simetría el campo gravitatorio será radial y el módulo tendrá el mismo valor en todos los puntos de la superficie S.
Esta superficie (gausiana) la utilizaremos para calcular el valor del módulo de **g**.
Partimos del teorema de Gauss

$$\boxed{\oint_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = 4\cdot\pi\cdot G\cdot\sum m_{dentro}}$$

Resolvamos el primer miembro de la igualdad

$$\oint_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = \oint_S g\cdot\cos\varphi\cdot dS = \oint_S g\cdot 1\cdot dS = g\cdot\oint_S dS = g\cdot S = g\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2$$

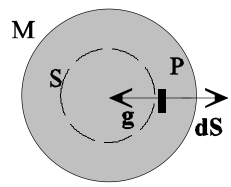
Como dentro de la superficie cerrada cuando r >R la masa dentro es la masa total M el segundo miembro nos queda

$$4\cdot\pi\cdot G\cdot\sum m_{dentro} = 4\cdot\pi\cdot G\cdot M$$

Por tanto $g\cdot 4\,\pi\cdot r^2 = 4\,\pi\cdot M$ que despejando resulta $\boxed{g = G\cdot\dfrac{M}{r^2}}$ Si r > R

Conclusión: El campo creado por una distribución de masa homogénea esférica en puntos exteriores a la misma tiene el mismo valor que si la masa M fuera puntual y estuviera colocada en el centro.
(Newton ya supuso que los efectos gravitatorios de los planetas serían los mismos si la masa estuviera concentrada en el centro).

b- Puntos interiores a la esfera r < R



Para calcular el campo en un punto P interior a la masa, situado a una distancia r del centro de la misma r < R observemos que podemos tomar una superficie cerrada esférica de radio r< R en la que, por razones de simetría, el campo gravitatorio será radial y el módulo tendrá el mismo valor en todos los puntos.

Esta superficie (gausiana) la utilizaremos para calcular el valor de **g**.
El esquema sería semejante al representado en el apartado anterior con la gausiana S dentro de la masa M.
Todos los cálculos y reflexiones del apartado -a- son válidos salvo que la masa dentro no es toda la masa de la esfera sino una parte de la misma.

$$\boxed{g = G \cdot \frac{m_{dentro}}{r^2}}$$

Como la esfera es homogénea la relación masa/ volumen es constante.

$$\frac{M}{V} = \frac{m_{dentro}}{V_{dentro}}$$
$$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3} = \frac{m_{dentro}}{\frac{4}{3}\pi \cdot r^3}$$

Si sustituimos el valor de la masa de dentro resulta

$$\boxed{g = G \cdot \frac{M}{R^3} \cdot r}$$ Si r < R

Que es el valor del campo gravitatorio creado por una distribución esférica y homogénea de masa en puntos interiores a la misma.
Observa que cuando r = R ambas expresiones coinciden y que el campo gravitatorio en el centro es nulo.

Ejercicio: Haz la representación de la función g = f(r) entre el origen y el infinito.

c-Esfera cargada

En el caso de una distribución esférica de carga el resultado en los puntos exteriores se calcularía de forma análoga y el resultado sería el mismo que si la carga fuera puntual y estuviera en el centro.

$$\boxed{E = K \cdot \frac{q}{r^2}}$$

En puntos interiores, si la esfera es conductora en equilibrio electrostático el campo es cero.
Si la esfera es dieléctrica con la carga uniformemente repartida calcularemos el valor del campo con reflexiones análogas a las seguidas en la distribución de masa.
El resultado es

$$\boxed{E_{dentro} = K \cdot \frac{q_{dentro}}{r^2} = K \cdot \frac{Q}{R^3} \cdot r}$$