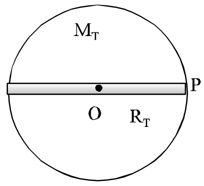
Física 2º Bachillerato **Movimiento armónico simple**

Túnel terrestre

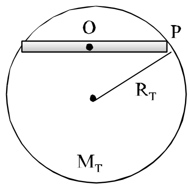
Pretendemos revolucionar el transporte terrestre y para ello vamos a construir unos túneles que atravesando la Tierra vayan de un punto a otro de la superficie de la misma. Uno de ellos pasará por el centro de la Tierra y el otro no, tal y como se representa en los esquemas.



Supondremos que el vagón que va a viajar lo hace sometido a la fuerza gravitatoria terrestre y a las paredes del túnel que no ejercen rozamiento sobre las ruedas del vagón.

Aceptemos que la Tierra es esférica y que su masa está repartida homogéneamente.

Utilizando como datos el radio terrestre R_T y g_0:

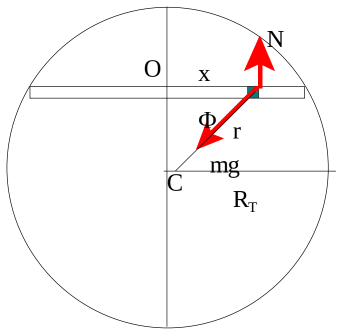


a- Demuestra que en esas condiciones el vagón describiría un movimiento armónico simple con punto de equilibrio en O y amplitud R_T si el túnel pasa por el centro de la Tierra.

b- Calcula el tiempo que invertiría en llegar a las antípodas si lo dejáramos en reposo en el punto P, así como la máxima velocidad que alcanzaría en su recorrido.

c-Demuestra que si el túnel no pasara por el centro de la Tierra el móvil describiría también un movimiento armónico simple del mismo período, cualesquiera que fueran los puntos inicial y final.

Representemos el diagrama de fuerzas, que actúan sobre el vagón en el segundo caso. Está sometido a la fuerza gravitatoria y a la de contacto sin rozamiento, siendo C el centro de la Tierra, R_T el radio de la misma, r la distancia del vagón a C y x la posición del vagón con respecto al punto O



Aplicaremos al vagón el 2º principio de la dinámica en la dirección normal al túnel en que las fuerzas suman cero y en la dirección del túnel, eje X

Debemos tener en cuenta que g varía con la posición.

El valor de g en función de la posición podemos calcularlo suponiendo la Tierra es una esfera homogénea aplicando el teorema de Gauss para un campo Newtoniano.

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{S} = 4\cdot\pi\cdot\sum c_{dentro} \qquad \textit{Aplicado alcampo gravitatorio}$$

$$\oint \vec{g}\cdot d\vec{S} = 4\cdot\pi\cdot G\cdot M_{dentro}$$

$$g\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2 = 4\cdot\pi\cdot G\cdot M_{dentro} \qquad g_{dentro} = G\cdot\frac{M_{dentro}}{r^2}$$

Y por considerar la tierra homogenea

$$\frac{M_T}{M_{dentro}} = \frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R_T^3}{\rho\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3} = \frac{R_T^3}{r^3} \qquad \textit{Sustituyendo}$$

$$g_{dentro} = G\cdot\frac{M_T}{R_T^3}\cdot r$$

Aplicando el resultado anterior que nos da g dentro tenemos

$$\sum F_x = m \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \cos\Phi = m \cdot a$$

$$-m \cdot g \cdot \frac{x}{r} = m \cdot a_x$$

$$a_x = -g \cdot \frac{x}{r} = -G \cdot \frac{M_T}{R_T^3} \cdot r \cdot \frac{x}{r} = -G \cdot \frac{M_T}{R_T^3} \cdot x$$

Este resultado nos dice que la aceleración del vagón es en módulo proporcional a la distancia al punto de equilibrio y es una aceleración recuperadora pues tiene sentido contrario a x.
La ecuación es formalmente idéntica a la del m.a.s., por lo que el vagón describirá ese movimiento.
Comparando ambas podemos determinar la pulsación del movimiento y el período del mismo.

$$a = -\omega^2 \cdot x \qquad a = -G \cdot \frac{M_T}{R_T^3} \cdot x$$

$$\omega^2 = \left(\frac{2 \cdot \pi}{T}\right)^2 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^3} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{R_T^3} = \frac{g_0}{R_T}$$

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{R_T}{g_0}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{6{,}37 \cdot 10^6}{9{,}8}} = 5{,}06 \cdot 10^3 s = 1h23'$$

Observa que el período no depende de la longitud del túnel.
Si dejáramos ir simultáneamente tres vagones en los túneles representados, describirían m.a.s. con el mismo período, oscilarían en fase aunque no alcanzarían la misma rapidez máxima ni la misma aceleración máxima.