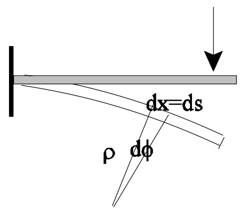
Mecánica 2º Bachillerato

Introducción al estudio teórico de la flexión

Flexión

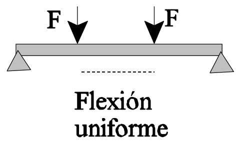
Al someter a una viga empotrada o apoyada a fuerzas perpendiculares la viga, ésta cambia su forma y decimos que flexa.



Pandeo

Al someter a una viga (columna) a fuerzas de compresión puede suceder que la viga cambie su forma y flexa pudiendo provocar su rotura no por compresión sino por pandeo.

Flexión uniforme. Tensiones de tracción y compresión



En la viga representada las fuerzas cortantes son cero Q = 0. (Flexión pura)
Para el análisis tomamos un trozo de viga de longitud ds que flexa debido a las cargas a que la sometemos. (Fig 1)
Aceptaremos que las flexiones son pequeñas y aproximaremos $ds = dx = L_0$.
Al ejercer las fuerzas F sobre la viga (Fig 2) el resultado es una deformación.
Un trozo elemental de la misma se ve sometido a las fuerzas y momentos representados en la fig 3 (Q = 0 y M es el flector) que dan lugar a la forma deformada de la fig 4.
Unas fibras se alargan y otras se acortan en función de la distancia que las separa de la fibra neutra.

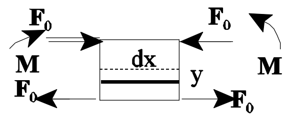


Figura 3

Fibra neutra: Fibra del elemento de viga que no se acorta ni se alarga al flexionar. Si la viga es simétrica es la fibra de enmedio
Radio de curvatura de la viga en ese elemento ρ es la distancia de la fibra neutra al centro de curvatura. Su relación con el ángulo flexado es aceptando que las flexiones son pequeñas $dx = \rho \cdot d\phi$
Curvatura: Inverso del radio de curvatura $k = 1/\rho$.

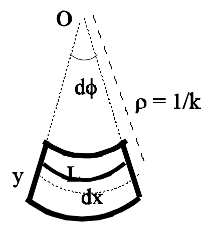


Figura 4

Relación entre la tensión de tracción y el momento flector. Ley de Navier.

Analicemos qué le sucede a una fibra cualquiera que se encuentra a una distancia -y- de la fibra neutra cuando sometemos la viga a flexión.
La fibra, de longitud inicial dx cambia su longitud hasta un valor L
Aplicando dos veces la definición de ángulo en radianes resulta la nueva longitud:

$$L = (\rho - y)\cdot d\phi = (\rho - y)\cdot dx/\rho =(dx - k \cdot y \cdot dx)$$

Y la variación de longitud que experimenta $\Delta L = (dx - k \cdot y \cdot dx) - dx = - k \cdot y \cdot dx$
Y la variación relativa de longitud $\varepsilon_x =\Delta L /dx = - k \cdot y \cdot dx /dx = - k \cdot y$

***Conclusiones*:** El alargamiento o acortamiento de las fibras en la flexión es proporcional a la distancia a la fibra neutra.

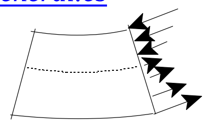
$$\boxed{\varepsilon_x = - k \cdot y}$$

Si aceptamos que estamos en el tramo lineal de deformaciones donde se cumple la ley de Hook la tensión de tracción o compresión resulta $\sigma_s = E \cdot \varepsilon_x = - E \cdot k \cdot y$
Por tanto una viga en flexión se ve sometida a esfuerzos de tracción y compresión en la dirección del eje de la viga, proporcionales a la distancia al eje neutro, al módulo de Young y a la curvatura.

$$\boxed{\sigma_s = - E \cdot k \cdot y}$$

Tensión de tracción

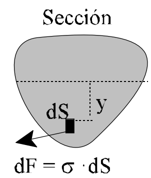
Si sobre el conjunto de la viga no actúan fuerzas de compresión o tracción, la suma de los esfuerzos sobre una sección será cero.



Cálculo del momento de las fuerzas de tracción y compresión respecto a la fibra neutra
El momento resultante de esas fuerzas resulta: $M_0 = \int dF\cdot y = \int \sigma_s \cdot dS\cdot y$
lo que utilizando el resultado obtenido en el párrafo anterior resulta

$$M_0 = \int - E \cdot k \cdot y \cdot dS \cdot y = - E \cdot k \int y^2 \cdot dS = - E \cdot k \cdot I_z$$

siendo $\boxed{I_z = \int y^2\cdot dS}$ el momento de inercia de la superficie con respecto al eje que pasa por la fibra neutra
Como la suma de momentos ha de ser cero el momento flector $M = -M_0 = E \cdot k \cdot I$



$$\boxed{M = E \cdot k \cdot I_z}$$

Si combinamos los dos últimos resultados eliminando la curvatura -k- obtenemos la denominada ley de Navier que relaciona el momento flector y las tensiones de tracción y compresión a que se ven sometidas las fibras de la viga trabajando a flexión

$$k = M/E\cdot I_z \qquad \sigma_s = E \cdot k \cdot y = E \cdot M/E\cdot I_z \cdot y$$

$$\boxed{\sigma_x = M \cdot y / I_z}$$

Ley de Navier

$$\boxed{\sigma_{máx} = M_{máx} \cdot y_{máx} / I_z}$$

Esta ley nos muestra que las tensiones de tracción y compresión serán mayores en aquellas secciones sometidas a un mayor momento flector y dentro de éstas en las fibras más alejadas de la neutra. $Z = I_z / y_{máx}$
Se denomina módulo o momento resistente a la flexión al término $Z = I_z / y_{máx}$ que sólo depende de la geometría de la sección, cuyas dimensiones son L^3. Con este término la ley puede escribirse: $\sigma_{máx} = M_{máx} / Z$

$$\boxed{Z = I_z / y_{máx}}$$

Módulo a flexión

Diseño de vigas a tracción

$$\boxed{\sigma_{máx} = M_{máx} / Z}$$

Tensión máxima

Las tensiones de tracción y compresión de cualquier fibra de una viga no deberán superar la máxima tensión admisible del material para evitar el deterioro o la ruptura de la misma. Por ello en nuestro análisis de esfuerzos compararemos la tensión admisible con la máxima que soporta allí donde el momento flector es máximo.
El objetivo es fabricar vigas con el menor consumo de material posible lo que implica beneficios económicos, ecológicos, de transporte, de carga sobre otros elementos, etc...
Con la misma cantidad de material podemos fabricar vigas de la misma sección pero de distinta forma. Como la ley de Navier nos muestra que a mayor módulo de flexión las tensiones son menores interesa fabricarlas con un módulo elevado. Una sección es más eficiente que otra si tiene un módulo mayor.
Como $Z = (1/y_{máx}) \cdot \int y^2 \cdot dS$ para conseguir mayores Z con la misma cantidad de material deberemos alejar el material lo más posible de la fibra neutra.
Como el hormigón trabaja mal a tracción se hace necesario armar las vigas de ese material con varillas de hierro en las zonas que trabajan a tracción. Se usa hierro porque trabaja bien a tracción y tiene un coeficiente de dilatación muy semejante al del hormigón

Flexión no uniforme. Tensión de cortadura. Diseño de vigas

$$\boxed{\tau = Q \cdot m / b \cdot I_z}$$

Ley de Colignon

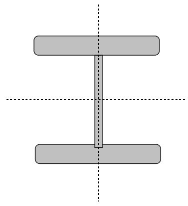
Si las fuerzas de cortadura Q no son cero las secciones transversales de la viga están también sometidas a tensiones cortantes τ y puede demostrarse que esta tensión se distribuye por la sección transversal siguiendo la ley de Colignon

Siendo: Q: Fuerza cortante en esa sección, b la anchura de la viga, m un parámetro geométrico que depende de la geometría de la sección $m = \int y \cdot dS$ e I_z el momento de inercia de la sección.

$$\boxed{\tau = Q \cdot \frac{\int y \cdot dS}{b \cdot \int y^2 \cdot dS}}$$

Observa que el esfuerzo cortante es máximo en y = 0 y mínimo el las partes más alejadas de la fibra neutra.

Para soportar las tensiones cortantes las vigas deberían ser más anchas en la zona de la línea neutra pero dado que el esfuerzo cortante resulta ser en las vigas inferior al de tracción éstas suelen hacerse con la mayor parte del material alejado de la fibra neutra en forma de doble T o de patín con un alma estrecha uniendo las dos platablandas.



En muchos casos las vigas se hacen de sección no constante, más estrechas allí donde los momentos flectores son menores.

Las dimensiones y pesos de las vigas están normalizados.

Una viga W 30x211 nos dice que es de patín ancho de 30 pulgadas y 211 lb/pie

Las vigas de madera se fabrican rectangulares y se dan sus dimensiones b x h.

Las vigas de aluminio se fabrican por extrusión

Momentos de inercia y módulos de flexión de las secciones rectangular y circular

$$I_{vigarect.} = b \cdot \frac{h^3}{12} \qquad Z_{vigarect.} = b \cdot \frac{h^2}{6}$$

$$I_{vigacil.} = \pi \cdot \frac{d^4}{64} \qquad Z_{vigacil.} = \pi \cdot \frac{d^3}{32}$$