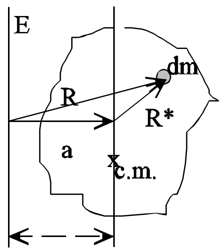
Mecánica 2º Bachillerato **Momentos de inercia**

A - Teorema de Steiner
B - Momentos de inercia con respecto a planos, ejes y puntos
C- Momentos de inercia de figuras homogéneas

A- Teorema de Steiner:

Este teorema nos permitirá , conociendo el momento de inercia con respecto a un eje que pase por el c.m.,calcular momentos de inercia de sólidos rígidos con respecto a ejes paralelos.



Considera el sólido rígido representado, del que conocemos su momento de inercia con respecto al eje E´ que pasa por su c.m. y vamos a calcular el momento de inercia con respecto al eje E paralelo al anterior a una distancia a del mismo.
De la definición de momento de inercia

$$I_E = \int R^2 \cdot dm = \int (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) dm = \int (\mathbf{a}+\mathbf{R}^*)\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{R}^*)\, dm =$$
$$= \int \{a^2 + R^{*2} + 2\cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}^*\}\, dm =$$
$$= \int a^2 \cdot dm + \int R^{*2} \cdot dm + \int 2\cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}^*\, dm$$

La primera integral es inmediata de valor $m\cdot a^2$.
La segunda integral es el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el c.m.
La tercera integral siempre es cero pues **a** es cte y saldría fuera y el otro término sería la posición del c.m. visto desde el c.m., en el plano perpendicular a los ejes

Por tanto:

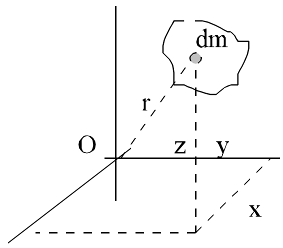
$$\boxed{I_E = I_{c.m.} + m \cdot a^2}$$

B-- Momentos de inercia con respecto a planos, ejes y puntos

Así como el momento de inercia de un sólido rígido con respecto a un eje nos mide la dificultad para cambiar su movimiento de rotación con respecto a un eje, los momentos de inercia con respecto a puntos o planos, no tienen sentido físico, y los utilizaremos como herramienta para calcular momentos de inercia con respecto a ejes en aquellas situaciones en que el cálculo sea más simple.

Considera un s.r. y tres ejes perpendiculares entre sí, el punto de corte de los mismos y los planos que contienen a cada pareja de ejes.

Definiremos momento de inercia con respecto a un punto o a un plano a la suma de las masas de todos los elementos del sólido por el cuadrado de la distancia al punto o al plano.



Observando el esquema adjunto se puede escribir:

Momentos de inercia con respecto a los ejes:

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\cdot dm \qquad I_y = \int (x^2 + z^2)\cdot dm \qquad I_z = \int (x^2 + y^2)\cdot dm$$

Momentos de inercia con respecto a los planos

$$I_{xy} = \int z^2 \cdot dm \qquad I_{xz} = \int y^2 \cdot dm \qquad I_{yz} = \int x^2 \cdot dm$$

Momento de inercia con respecto al punto O

$$I_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2)\cdot dm$$

Los resultados anteriores se relacionan del siguiente modo:

$$2 \cdot I_0 = I_x + I_y + I_z$$
$$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}$$

Los resultados anteriores permiten calcular de modo más simple el momento de inercia de una esfera con respecto a un eje que pase por su centro a partir del momento de inercia con respecto al centro de la esfera

C- Momentos de inercia de algunas figuras homogéneas con respecto a ejes principales que pasan por su centro de masas

$$\boxed{I = m \cdot R^2}$$

Volante

$$\boxed{I = \tfrac{1}{2} m \cdot R^2}$$

Disco o polea

$$\boxed{I = \frac{1}{12} m \cdot L^2}$$

Varilla

$$\boxed{I = \frac{2}{5} m \cdot R^2}$$

Esfera

$$\boxed{I = \frac{3}{10} m \cdot R^2}$$

Cono

En los casos de sistemas homogéneos más complejos, varios sólidos o sólidos con huecos puede calcularse el momento de inercia sumando por tramos homogéneos y asignando masa negativas a ls huecos.