Física 2º Bachillerato **Movimiento vibratorio armónico simple**. M.a.s.

Un movimiento vibratorio u oscilatorio es aquél en que las partículas se mueven alrededor de una posición de equilibrio.
Un caso particular de movimiento oscilatorio que analizaremos es el del movimiento vibratorio armónico simple. Es un movimiento oscilatorio en que la fuerza resultante que actúa sobre la partícula viene dada por la expresión: $\boxed{F = -K \cdot x}$ Que es la expresión de la fuerza elástica denominada ley de Hook.

Ecuación diferencial del m.a.s.

Movimiento de un cuerpo sometido a la fuerza elástica en una dirección.
Consideremos un cuerpo puntual sobre el que la fuerza resultante es la fuerza elástica dada por la ley de Hook. Aplicando el 2º principio de la dinámica y la definición de aceleración resulta:

$m \cdot a = -K \cdot x$ $$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -K \cdot x$$

Reordenando el resultado nos queda la ecuación diferencial del movimiento armónico simple.
Resolver esta ecuación consiste en encontrar la función x(t) que cumpla con esa ecuación.
Cualquier partícula cuyo movimiento cumpla con la ecuación anterior describe un m.a.s.

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m} \cdot x = 0}$$

Ecuación del mas

Ecuación del m.a.s rectilíneo. La solución sinusoidal

Supongamos que una partícula se mueve en el eje X según la ecuación.
$\boxed{x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)}$ siendo A, ω y δ constantes
Comprobemos que esta ecuación es una posible solución de la ecuación del mas.

$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta)$ si derivamos con respecto al tiempo
$dx/dt = A \cdot \omega \cos(\omega \cdot t + \delta)$ que nos da la velocidad de la partícula
Volviendo a derivar
$d^2x/dt^2 = -A \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \delta) = -\omega^2 \cdot x$
resultado que nos da la aceleración de la partícula en función de la posición. $\boxed{a = -\omega^2 \cdot x}$

Sustituyendo los resultados en la ecuación diferencial nos queda $-\omega^2 \cdot x + \frac{K}{m} \cdot x = 0$ que es válida para cualquier valor de x si se cumple que $\boxed{\omega^2 = \frac{K}{m}}$

Podríamos escribir la ecuación del m.a.s . $x = A \cdot sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t + \delta\right)$

Significado físico de las constantes

1. Amplitud: A: Observa que $x = A$ cuando $\text{sen}(\omega\cdot t + \delta) = 1$ por tanto $A = x_{máx.}$
A representa la máxima elongación de la partícula (distancia al origen).
Se la denomina amplitud del mas.

2.Fase inicial: δ Observa que cuando $t = 0$ $x_0 = A\ \text{sen}\ \delta$
por tanto δ tiene que ver con la posición del móvil en el origen de tiempos.
Al término δ se le denomina fase inicial.
Si tomamos $t = 0$ cuando $x = 0$ entonces $\delta = 0$

3. Pulsación: Período y frecuencia
Como la función seno es periódica (repite sus valores de forma regular) vamos a determinar el mínimo tiempo que empleará el móvil en repetir situación.
(Pasar de una posición a la misma en las mismas condiciones)
Para que en dos instantes t_1 y t_2 la posición sea la misma $x_1 = x_2$ es necesario que el seno de ambas fases sean iguales $\text{sen}(\omega\cdot t_1 + \delta) = \text{sen}(\omega\cdot t_2 + \delta)$
condición que se cumple si la diferencia de fases es un número entero de veces 2π.
$(\omega\cdot t_2 + \delta) - (\omega\cdot t_1 + \delta) = n\cdot 2\pi$ siendo n un nº entero
Si despejamos resulta $t_2 - t_1 = n\cdot 2\pi/\omega$
Al menor intervalo de tiempo que invierte el móvil en repetir situación se le denomina período T.
En la ecuación anterior debe cumplirse que $n = 1$.
Por tanto $T = 2\pi/\omega$ o bien $\boxed{\omega = 2\pi/T}$
A la constante ω se la denomina pulsación del movimiento armónico simple y guarda relación con el período del mismo.
Al igual que en resto de movimientos periódicos se denomina frecuencia al número de veces que se repite el movimiento por unidad de tiempo $f = 1/T$ o bien $\boxed{\omega = 2\pi\cdot f}$
Podemos asimismo relacionar el período del mas con m y K.

$$\omega^2 = \frac{(2\pi)^2}{T^2} = \frac{K}{m}$$ y despejando el período queda $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

Velocidad y aceleración del m.a.s.
A partir de la ecuación de la posición, y derivando dos veces con respecto al tiempo resulta:
$v = dx/dt = A\cdot\omega\cos(\omega\cdot t + \delta)$ siendo $A\cdot\omega$ la máxima velocidad
Observa que cuando la posición es máxima la velocidad es nula y viceversa.
$a = dv/dt = -A\cdot\omega^2\cdot\text{sen}(\omega\cdot t + \delta) = -\omega^2 x$ siendo $A\cdot\omega^2$ la máxima aceleración
Observa que cuando la posición es nula también lo es la aceleración y que posición y aceleración toman los valores máximos simultáneamente pero de sentido contrario.

Otras consideraciones
La ecuación de la posición de una partícula que describe un m.a.s podríamos haberlo escrito con la función coseno $\boxed{x = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \delta)}$ que es formalmente idéntica a la seno, sólo que desfasada en π/2 radianes por delante del seno.
Distintos movimientos en la naturaleza pueden considerarse de forma aproximada a un m.a.s.
Ej. las vibraciones de las partículas de las redes cristalinas iónicas o covalentes.
Movimientos más complejos pueden estudiarse como superposición de distintos m.a.s de la misma dirección

o perpendiculares, y de la misma o distinta amplitud, período o fase inicial.

Ejercicio

Un móvil se mueve en el plano xy siendo sus ecuaciones paramétricas

$x = A \text{ sen } \omega \cdot t \qquad y = A \cos \omega \cdot t$

(Dos m.a.s. superpuestos perpendiculares, desfasados $\pi/2$)

a. Escribe las ecuaciones paramétricas de la velocidad y de la aceleración y calcula sus módulos.

b. Calcula la distancia del móvil al origen. ¿De qué clase de movimiento se trata? Justifica.

Ejercicio

Demuestra que la relación entre la posición y la velocidad de una partícula que describe un m.a.s. viene dada por la ecuación:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2 \cdot \omega^2} = 1$$