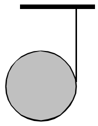
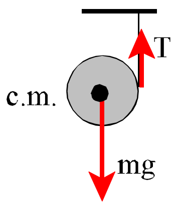
Mecánica 2º Bachillerato ***Problemas resueltos de mecánica del sólido rígido***

12. *Un yo-yo puede considerarse como un disco de masa m y radio R que tiene una cuerda de masa despreciable enrollada en su periferia.*
a- Calcula la aceleración con la que caerá el c.m. del yo-yo sujeto por la cuerda y la tensión de la cuerda si $I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$
b- Calcula la $v_{c.m.}$ *cuando ha caído una altura h y demuestra que la energía cinética del yo-yo es m·g·h por lo que la tensión no realiza trabajo alguno.*
c- Resuelve el mismo problema si la cuerda estuviera enrollada en un canal a una distancia R´= 2/3· R



a. En primer lugar representamos las fuerzas que actúan sobre el yo-yo y aplicamos el 2º principio a la traslación del centro de masas y a la rotación alrededor del centro de masas que aunque sea un observador no inercial puede aplicarlo dado que las ficticias"fuerzas de inercia" estarían aplicadas en ese punto por lo que no generan momentos con respecto al mismo.



Las ecuaciones son

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_{c.m.} \qquad m \cdot g - T = m \cdot a_{cm.}$$

$$\sum \vec{M}_{ext} = I \cdot \alpha \qquad R \cdot T = I \cdot \frac{a_{c.m.}}{R}$$

$$a_{c.m.} = \frac{m \cdot g}{m + \frac{I}{R^2}} \qquad T = m \cdot g \cdot \left(1 - \frac{m \cdot R^2}{I + m \cdot R^2}\right)$$

En el caso que nos ocupa del yo-yo con el momento de inercia indicado resulta

$$I = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \qquad a_{c.m.} = \frac{2}{3} \cdot g \qquad T = \frac{1}{3} \cdot m \cdot g$$

b.La energía cinética adquirida por el yo-yo la determinaremos como suma de las energías cinéticas de traslación del c.m. y de la rotación alrededor del c.m.
La velocidad adquirida por el c.m. la calculamos a partir de las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado que lleva dado que las fuerzas son constantes.

$$v_{c.m.} = \sqrt{2 \cdot a_{c.m.} \cdot h} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot g \cdot h}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{c.m.}^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4}{3} \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{\frac{4}{3} \cdot g \cdot h}{R^2}$$

$$E_c = m \cdot g \cdot h$$

Por tanto la energía mecánica no ha cambiado en la caída lo que se debe a que la fuerza gravitatoria es conservativa y la tensión aunque no lo es no realiza trabajo al no desplazarse. Está aplicada sobre el centro instantáneo de rotación del yo-yo.

c. En el caso de que la cuerda no estuviera enrollada en la periferia las diferencias estarían en el brazo del momento ejercido por T que pasaría a ser R’ y la relación entre la aceleración del c.m. y la angular del yo-yo.

$$R' \cdot T = I \cdot \alpha \qquad R' \cdot T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{a_{c.m.}}{R'}$$

$$\frac{2}{3} \cdot R \cdot T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{a_{c.m.}}{\frac{2}{3} \cdot R} \qquad T = \frac{9}{8} \cdot a_{c.m.}$$

Las ecuaciones serían

$$m \cdot g - T = m \cdot a_{c.m.}$$

$$T = \frac{9}{8} \cdot m \cdot a_{c.m.}$$