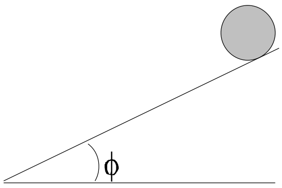
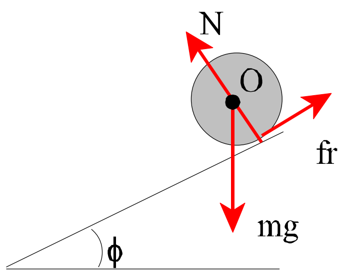
Mecánica 2º Bachillerato ***Problemas resueltos de Mecánica del sólido rígido***

13*. Considera un plano inclinado ϕ º con respecto a la horizontal. A una altura h del suelo se coloca un cuerpo de masa m y radio R que va a caer rodando sin deslizar por el plano inclinado.*
a- Calcula bajo el punto de vista dinámico la $a_{c.m.}$ del mismo, la $v_{c.m.}$ cuando llegue al suelo, el tiempo invertido en la caída y el valor de la fuerza de rozamiento de rodadura.
b- Aplícalo al caso de un aro, un disco y una esfera.
c- Compara la energía cinética abajo con la energía potencial arriba en uno cualquiera de los casos.¿ Qué conclusión extraes de este resultado? ¿ Qué trabajo realiza f_r de rodadura? Si esta fuerza fuera cero ¿ Cómo caería?
d- Calcula bajo el punto de vista energético la v_{cm} de uno de ellos.
Datos: $I_{aro} = m \cdot R^2$ $I_{disco} = ½ \cdot m \cdot R^2$ $I_{esfera} = 2/5 \cdot m \cdot R^2$



a. En primer lugar representaremos las fuerzas que actúan sobre la rueda que son las ejercidas por la tierra y por la superficie de contacto representada ésta como suma de dos, la normal a la misma y la tangente, fuerza de rozamiento que es estático dado que rueda sin deslizar.



Aplicaremos el segundo principio de la dinámica $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_{c.m.}$ a la traslación del centro de masas

Aplicaremos el segundo principio de la dinámica $\sum \vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$ a la rotación alrededor del centro de masas, punto O.

Notas:
No es posible aplicar esto último con respecto al punto de contacto dado que el mismo acelera y por tanto no es un observador inercial. Sí es posible aplicarlo con respecto al centro de masas pues aunque acelere,” las fuerzas de inercia” estarían aplicadas en ese punto por lo que su momento respecto a él es nulo.
Es imprescindible rozamiento estático pues sin él no tendría aceleración angular por lo que si parte del reposo deslizaría.

Las ecuaciones son

$$m \cdot g \cdot sen\varphi - f_r = m \cdot a_{c.m.}$$

$$R \cdot f_r = I \cdot \frac{a_{c.m.}}{R}$$

Que despejando conducen a:

$$\boxed{a_{c.m.} = \frac{m \cdot g \cdot sen\varphi}{m + \frac{I}{R^2}} \qquad f_r = \frac{m \cdot g \cdot sen\varphi}{\frac{m \cdot R^2}{I} + 1}}$$

La velocidad con la que el centro de masas llega abajo si cae una altura h la obtenemos de las ecuaciones del m.u.a

$$v_{c.m.} = \sqrt{2 \cdot a_{c.m.} \cdot s} = \sqrt{2 \cdot a_{c.m.} \cdot \frac{h}{sen\varphi}} = \sqrt{2 \cdot \frac{m \cdot g \cdot sen\varphi}{m + \frac{I}{R^2}} \cdot \frac{h}{sen\varphi}} = \sqrt{2 \cdot \frac{m \cdot g \cdot h}{m + \frac{I}{R^2}}}$$

Y el tiempo empleado en caer

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a_{c.m.}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot (m + \frac{I}{R^2})}{m \cdot g \cdot sen^2\varphi}}$$

b. Para aplicarlo al aro disco y esfera sólo es necesario sustituir el valor del momento de inercia I en cada caso

Aro	$I = m \cdot R^2$	$a_{c.m.} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot sen\varphi$	$f_r = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g \cdot sen\varphi$	$v_{c.m.} = \sqrt{g \cdot h}$	$t = \sqrt{4 \cdot \frac{h}{g \cdot sen^2\varphi}}$
Disco	$I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$	$a_{c.m.} = \frac{2}{3} \cdot g \cdot sen\varphi$	$f_r = \frac{1}{3} \cdot m \cdot g \cdot sen\varphi$	$v_{c.m.} = \sqrt{\frac{4}{3} g \cdot h}$	$t = \sqrt{3 \cdot \frac{h}{g \cdot sen^2\varphi}}$
Esfera	$I = \frac{2}{5} m \cdot R^2$	$a_{c.m.} = \frac{5}{7} \cdot g \cdot sen\varphi$	$f_r = \frac{2}{7} \cdot m \cdot g \cdot sen\varphi$	$v_{c.m.} = \sqrt{\frac{10}{7} g \cdot h}$	$t = \sqrt{\frac{14}{5} \cdot \frac{h}{g \cdot sen^2\varphi}}$
Deslizando		$a_{c.m.} = g \cdot sen\varphi$	$f_r = 0$	$v_{c.m.} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$	$t = \sqrt{2 \cdot \frac{h}{g \cdot sen^2\varphi}}$

Un cuerpo que desliza sin rozamiento, llega antes abajo y los que ruedan depende de su momento de inercia.
Llega más rápido quien tiene menos momento de inercia.
Necesita más fuerza de rozamiento el que tiene más momento de inercia.

c. La energía cinética abajo será la suma de la de traslación más la de rotación.

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{c.m.}^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot v_{c.m.}^2 \cdot (m + \frac{I}{R^2}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2 \cdot \frac{m \cdot g \cdot h}{m + \frac{I}{R^2}}} \right)^2 \cdot (m + \frac{I}{R^2}) =$$

$$= m \cdot g \cdot h$$

Tienen la misma energía cinética coincidente con la potencial gravitatoria arriba, resultado razonable dado que la fuerza de rozamiento estática no se desplaza por lo que no realiza trabajo alguno, al igual que la normal y la fuerza peso es conservativa..
Si no hubiera rozamiento deslizaría.

d. Por la conservación de la energía mecánica

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{c.m.}^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{v_{c.m.}^2}{R^2}$$

$$v_{c.m.} = \sqrt{2 \cdot \frac{m \cdot g \cdot h}{m + \frac{I}{R^2}}}$$